ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK

10

DERS KİTABI

Bu kitap, Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı'nın 28.05.2018 tarih ve 78 sayılı (ekli listenin 151'nci sırasında) kurul kararıyla 2018-2019 öğretim yılından itibaren 5 (beş) yıl süreyle ders kitabı olarak kabul edilmiştir.

YAZAR

Erhan KARAKUYU

ANKA KUŞU yayınevi

ISBN
978-605-74477-7-7

Dil Uzmanı
Necla ŞANAL

Görsel Tasarım Uzmanı
Aysel GÜNEY TÜRKEÇ

ANKA KUŞU yayınevi

Kavacık Subayevleri Mah. Fahrettin Altay Cad. No.: 4/5 Keçiören/ANKARA

tel.: (0.312) 318 0 318 • belgegeçer: (0.312) 318 0 318

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

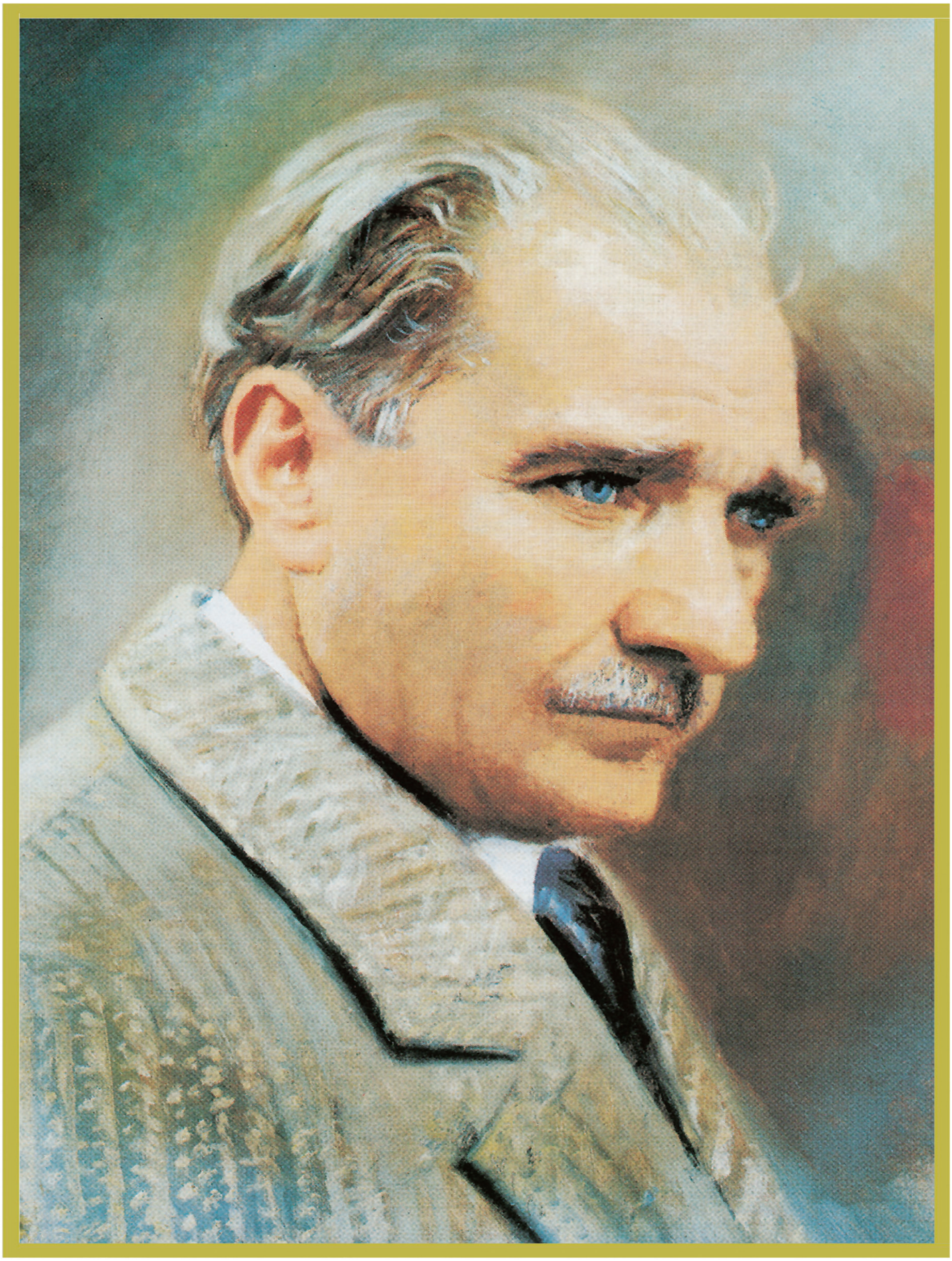
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

KİTABIN TANITIMI

Alt öğrenme alanı başlığının verildiği bölümdür.

1

1. SAYMA VE OLASILIK

1.1. Sıralama ve Seçme

Konunun gerçek yaşamla ilişkilendirildiği bölümdür.

Dünyada 4 yılda bir düzenlenen Olimpiyat Oyunları'nda din, dil, ırk ayrımı gözetilmeksizin tüm sporcular biraraya gelir. Bu spor şöleninde kurallara bağlı kalarak, dürüstçe ve kardeşçe bir yarışın içine girilir.

Günümüzde yapılan Modern Olimpiyat Oyunları'nın kökeni Antik Yunan'da yapılan şenliklere dayanır. Önceleri 32 metre genişliğinde, 192 metre uzunluğunda bir pistte sadece 1 gün süren koşulardan oluşan oyunlara sonraları değişik mesafelerde yarışlar, disk ve cirit atma, uzun atlama, boks, güreş, atlı araba yarışları gibi branşlar eklenerek şenliklerin süresi de 5 güne çıkarıldı. Oyunlarda yarışmacılara ödül olarak zeytin dalından yapılmış çelenkler takılırdı.

Modern Olimpiyatların kurucusu Baron Pierre de Coubertın'dir (Baron Piyer dö Kobertin). İlk Modern Olimpiyatlar ise 1896 yılında Atina'da düzenlendi ve ardından her 4 yılda bir yapılmaya başladı.

8 sporcunun katıldığı bir atletizm yarışmasında ilk üç dereceye girenlerin kaç değişik şekilde sıralanabileceğini sayma yöntemleri ile bulabilir misiniz?

Kazanımın örnek çalışmalarla pekiştirildiği bölümdür.

Toplama Yöntemi

ÖRNEK

Cumartesi akşamı saat sekizde gösterime giren 4 farklı sinema filmi ve 3 farklı tiyatro oyunu vardır. "Bu durumda cumartesi akşamı bir arada olmak ve eğlenmek isteyen bir ailenin akşam sekizde kaç seçeneği olur?" sorusunu cevaplayalım.

ÇÖZÜM

Bu olayın oluşumu için birden fazla seçenek var ve aynı anda yalnız biri kullanılabileceği için $3 + 4 = 7$ durum gerçekleşebilir.

Konu ile ilgili bilginin verildiği bölümdür.

Bilgi

Sonlu ve ayrık kümelerin birleşiminin eleman sayısı $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ şeklinde bulunur. Bu şekilde sayma işlemine **toplama yolu ile sayma** denir. Ayrık iki işlemden biri m yolla, diğeri n yolla

Kazanımla ilgili ünlü matematikçilere ve okuma metinlerine yer verilen bölümdür.

Okuma Metni

EL KİNDÎ (801-873)

Temsili resim

İslam dünyasında tıp, astronomi, matematik, etimoloji ve müzik alanlarında toplam 290 kitap yayımlamıştır. Matematikte, sayı sistemleri üzerine kitaplar yazmış ve modern aritmetiğin büyük bir bölümünün kuruluşunu hazırlamıştır. El Kindî'nin şifre çözme üzerine 850 yılında yazdığı "Şifrelenmiş Mesajların Şifresini Çözme Üzerine Bir El Yazısı" adlı eseri, 1987 yılında İstanbul Osmalı Arşivi'nde keşfedilmiştir. El Kindî sekizi sayılar teorisi, ikisi oran ve zaman ölçümü, birisi de izafi büyüklükler hakkında olmak üzere 11 kitabında modern aritmetiğin temellerini atmıştır.

Yazdığı eserleri Rönesans'a ışık tutan El-Kindî aynı zamanda Orta Çağ'ın en büyük 10 akıl bilimcisinden biri olarak anılmaktadır.

(Kaynak: www.isam.org.tr/documents/_dosyalar/_pdfler/islam_arastirmalari.../027_054.pdf)

Konuyu öğrenme, keşfettirme veya pekiştirmeye yönelik çalışmaların yapıldığı bölümdür.

Etkinlik

- Bir madenî paranın atılması deneyinde örnek uzay kaç elemanlıdır?
- Üç madenî paranın atılması deneyinde örnek uzay kaç elemanlıdır?
- Bir zar atılması deneyinde örnek uzay kaç elemanlıdır?

Bilgi iletişim teknolojilerinden faydalandığımız bölümdür.

Bilgi İletişim Teknolojisi

1. www.eba.gov.tr internet adresinden "GeoGebra" programını indirerek bilgisayarınıza kurunuz.
2. Kurduğunuz programı çalıştırınız.
3. "Çokgen" butonuna basınız ve herhangi 4 nokta belirleyerek bir dörtgen çiziniz.

Konuyla ilgili dikkat edilmesi gereken ifadeleri içeren bölümdür.

Dikkat

Bir zarın n kez atılması veya n tane zarın atılması deneyinde örnek uzay 6^n elemanlıdır.

Aynı şekilde madenî bir paranın n kez atılması ile n tane madenî paranın atılması deneyinde örnek uzay 2^n elemanlıdır.

Konu sonu alıştırmaların verildiği bölümdür.

Alıştırmalar 1-1

1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere A kümesinin elemanları ile ilgili aşağıdaki cümleler doğru ise yay ayraç içine "D", yanlış ise "Y" yazınız.

Ölçme ve değerlendirme sorularının verildiği bölümdür.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

1) $P(n, 1) + P(n, 0) = 6$ ise n aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

1

SAYMA VE OLASILIK

1. SAYMA VE OLASILIK

1.1. Sıralama ve Seçme

Dünyada 4 yılda bir düzenlenen Olimpiyat Oyunları'nda din, dil, ırk ayrımı gözetilmeksizin tüm sporcular biraraya gelir. Bu spor şöleninde kurallara bağlı kalarak, dürüstçe ve kardeşçe bir yarışın içine girilir.

Günümüzde yapılan Modern Olimpiyat Oyunları'nın kökeni Antik Yunan'da yapılan şenliklere dayanır. Önceleri 32 metre genişliğinde, 192 metre uzunluğunda bir pistte sadece 1 gün süren koşulardan oluşan oyunlara sonraları değişik mesafelerde yarışlar, disk ve cirit atma, uzun atlama, boks, güreş, atlı araba yarışları gibi branşlar eklenerek şenliklerin süresi de 5 güne çıkarıldı. Oyunlarda yarışmacılara ödül olarak zeytin dalından yapılmış çelenkler takılırdı.

Modern Olimpiyatların kurucusu Baron Pierre de Coubertın'dir (Baron Piyer dö Kobertin). İlk Modern Olimpiyatlar ise 1896 yılında Atina'da düzenlendi ve ardından her 4 yılda bir yapılmaya başladı.

8 sporcunun katıldığı bir atletizm yarışmasında ilk üç dereceye girenlerin kaç değişik şekilde sıralanabileceğini sayma yöntemleri ile bulabilir misiniz?

Toplama Yöntemi

ÖRNEK

Cumartesi akşamı saat sekizde gösterime giren 4 farklı sinema filmi ve 3 farklı tiyatro oyunu vardır. "Bu durumda cumartesi akşamı bir arada olmak ve eğlenmek isteyen bir ailenin akşam sekizde kaç seçeneği olur?" sorusunu cevaplayalım.

ÇÖZÜM

Bu olayın oluşumu için birden fazla seçenek var ve aynı anda yalnız biri kullanılabileceği için $3 + 4 = 7$ durum gerçekleşebilir.

Bilgi

Sonlu ve ayrık kümelerin birleşiminin eleman sayısı $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ şeklinde bulunur. Bu şekilde sayma işlemine **toplama yolu ile sayma** denir. Ayrık iki işlemden biri m yolla, diğeri n yolla yapılabiliyorsa bu işlemlerden herhangi biri $m + n$ yolla yapılabilir.

ÖRNEK

Bir grupta 2 erkek, 4 kız öğrenci vardır. Bu gruptan bir öğrencinin kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

Kızların kümesi $K = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ ve erkeklerin kümesi $E = \{E_1, E_2\}$ olsun. Bir öğrencinin seçildiği küme ise $K \cup E = \{K_1, K_2, K_3, K_4, E_1, E_2\}$ olur.

$s(K \cup E) = 4 + 2 = 6$ olur. Dolayısıyla bir öğrenci 6 farklı şekilde seçilebilir.

Çarpma Yöntemi

ÖRNEK

2 farklı pantolonu ve 3 farklı gömleği olan bir kişinin 1 pantolon ve 1 gömleği kaç farklı biçimde giyebileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

Pantolonlar P_1, P_2; gömlekler G_1, G_2, G_3 olsun.

$(P_1, G_1), (P_1, G_2), (P_1, G_3), (P_2, G_1), (P_2, G_2), (P_2, G_3)$ şeklinde seçenekleri olan bu kişi

$s(P) = 2$ ve $s(G) = 3$ olduğundan $2 \cdot 3 = 6$ farklı şekilde giyinebilir.

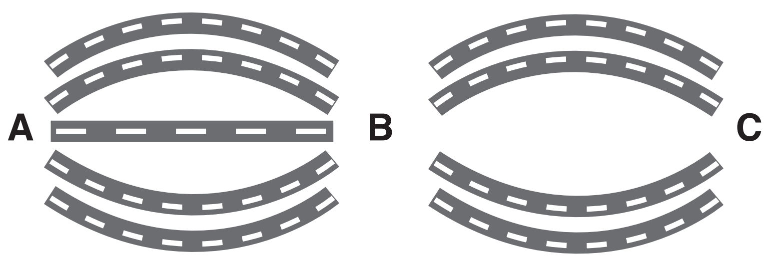
Bilgi

$(x, y) \in A \times B$, $s(A) = a$ ve $s(B) = b$ olmak üzere, (x, y) sıralı ikililerinin sayısı $a \cdot b$ tanedir. Sıralı ikililerin sayısını bu şekilde bulma işlemine **çarpma yolu ile sayma** denir.

n tane olayın gerçekleştiği bir olaylar dizisinde birinci olay m_1 farklı biçimde, ikinci olay m_2 farklı biçimde ve bu şekilde devam edildiğinde n inci olay m_n farklı biçimde gerçekleşiyorsa bu olayların tamamı $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot ... \cdot m_n$ çarpımı kadar farklı biçimde gerçekleşir. Bu yöntem ile yapılan sayma işlemi **saymanın temel ilkesi** olarak adlandırılır.

ÖRNEK

A kentinden B kentine 5 farklı yol, B kentinden C kentine 4 farklı yol vardır. Mehmet'in, askerlik görevini yapmak için A kentinden C kentine, B kentine uğramak koşulu ile kaç değişik şekilde gidebileceğini bulalım.



ÇÖZÜM

1. olay, A dan B ye 5 farklı biçimde gidilmesi durumudur.
2. olay, B den C ye 4 farklı biçimde gidilmesi durumudur.

Bu iki olayın birlikte gerçekleşmesi durumu $5 \cdot 4 = 20$ değişik şekilde olur.

1

Etkinlik

◈ $\{1, 2, 3\}$ kümesindeki rakamlarla 3 basamaklı sayılar yazınız.

✷ En küçük üç basamaklı sayı kaçtır?

✷ En büyük üç basamaklı sayı kaçtır?

◈ Yüzler basamağı 1 olan sayıları yazınız.

◈ Yüzler basamağı 1 olan rakamları farklı sayıları yazınız.

✷ Üç basamaklı sayıların tümünü yazarken hangi yöntemi kullanırsanız daha kısa olur?

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin elemanları ile üç basamaklı sayılar yazılacaktır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayalım:

a) Kaç farklı sayı yazılabilir?

b) Rakamları farklı olmak üzere kaç farklı sayı yazılabilir?

c) Kaç farklı çift sayı yazılabilir?

ç) Rakamları farklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?

ÇÖZÜM

a)

Yüzler	Onlar	Birler
6	6	6

Tüm basamaklara altışar rakam yazabiliriz.
Çarpma yöntemine göre $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ farklı sayı yazılabilir.

b)

Yüzler	Onlar	Birler
6	5	4

Yüzler basamağına 6 farklı rakam yazılabilir. Rakamları farklı olması gerektiğinden onlar basamağına geriye kalan 5 farklı rakam, birler basamağına da 4 farklı rakam gelebilir.

$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ sayı yazılabilir.

c) Sayının çift olması birler basamağının çift olmasını gerektirir. Birler basamağına 2, 4 ve 6 rakamları gelir. Diğer basamaklara, şart aranmadığı için 6 rakam da gelebilir.

Yüzler	Onlar	Birler
6	6	3

$\{2, 4, 6\}$

$6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$ sayı yazılabilir.

ç) Birler basamağına aynı biçimde 2, 4 ve 6 rakamlarından biri gelir. Rakamları farklı olacağı için diğer basamaklara 5 ve 4 farklı seçenek kalır.

Yüzler	Onlar	Birler
5	4	3

$\{2, 4, 6\}$

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ sayı yazılabilir.

ÖRNEK

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin elemanları ile üç basamaklı sayılar yazılacaktır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayalım:

a) Kaç farklı sayı yazılabilir?

b) Rakamları farklı kaç farklı sayı yazılabilir?

c) Kaç farklı çift sayı yazılabilir?

ç) Rakamları farklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?

ÇÖZÜM

a) Yüzler basamağına sıfır sayısı gelemeyeceği için 5 rakam, onlar ve birler basamağına rakamları farklı denmediği için 6 rakam yazılabilir.

Yüzler	Onlar	Birler
5	6	6

$5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$ olur.

b) Yüzler basamağına 0 hariç 5 rakam, onlar basamağına 0 dâhil edilebileceğinden geriye kalan 4 rakamla birlikte 5 rakam, birler basamağına da kalan 4 rakam yazılabilir.

Yüzler	Onlar	Birler
5	5	4

$5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ olur.

c) Sayının çift olması için birler basamağına 0, 2, 4 rakamlarından biri gelmelidir. Sıfır, yüzler basamağına gelemeyeceği için ve rakamların farklı olma koşulu da olmadığından yüzler basamağına 5 rakam yazılabilir. Onlar basamağına da 6 rakam gelebilir.

Yüzler	Onlar	Birler
5	6	3

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\{0, 2, 4\}$

$5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$ olur.

ç) Sayının çift olması için birler basamağına yine yukarıdaki gibi 0, 2 veya 4 gelebilir. Sıfır, yüzler basamağına gelemeyeceği için ve rakamları farklı olduğundan çözümü iki aşamada yaparız.

Sıfırın birler basamağına gelme durumu

Yüzler	Onlar	Birler
5	4	1

$\{0\}$

Sıfırın birler basamağına gelmeme durumu

Yüzler	Onlar	Birler
4	4	2

$\{2, 4\}$

$5 \cdot 4 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 52$ olur.

Bilgi

Her birinden istediğimiz sayıda kullanabileceğimiz n çeşit nesne ile r tane işlemi sıralı bir biçimde gerçekleştirmek istediğimizde her işlem için n seçeneğimiz olduğundan n^r yol vardır.

ÖRNEK

A, B, C harflerinin her birini istediğimiz kadar kullanarak yazabileceğimiz 6 harfli anlamlı ya da anlamsız harf dizilimi sayısını bulalım.

ÇÖZÜM

Her bir hanede 3 harfi de kullanabiliriz.

$\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} = 3^6$ dır. O hâlde 3^6 tane anlamlı ya da anlamsız farklı harf dizilimi buluruz.

ÖRNEK

20 soruluk ve her bir soruya ait 5 cevap seçeneği bulunan bir test için;

a) Cevap anahtarını kaç farklı şekilde hazırlayabileceğimizi,

b) Üst üste iki sorunun cevabı aynı olmamak üzere kaç farklı cevap anahtarı oluşturabileceğimizi bulalım.

ÇÖZÜM

a) Her bir soru için 5 seçenek düşünürsek;

$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot ... \cdot 5}_{20 \text{ tane}} = 5^{20}$ farklı cevap anahtarı oluşturabiliriz.

b) Üst üste 2 sorunun cevabı aynı olmayacak şekilde çözersek;

$5 \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot ... \cdot 4}_{19 \text{ tane}} = 5 \cdot 4^{19}$ farklı cevap anahtarı oluşturabiliriz.

ÖRNEK

"SEVCAN" kelimesindeki harflerin yerlerini değiştirerek anlamlı ya da anlamsız 6 harfli ve sesli harfle başlayan kaç farklı harf dizilimi yapabileceğimizi bulalım.

ÇÖZÜM

I. yol

"E" harfi ile başlayanlar ve "A" harfi ile başlayanlar olmak üzere soruyu iki bölüme ayırıp çözebiliriz.

$\underset{\underset{E}{\downarrow}}{\underline{1}} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} + \underset{\underset{A}{\downarrow}}{\underline{1}} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 120 + 120 = 240$ bulunur.

II. yol

İlk haneye 2 farklı harf yazabiliriz. Sonrakilere de kalan harf sayısını yazarız.

$\underset{\underset{A,\ E}{\downarrow}}{\underline{2}} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 240$ bulunur..

ÖRNEK

$\{a, b, c, d, e\}$ kümesinin elemanları ile yazılabilen 4 harfli, harfleri farklı, anlamlı ya da anlamsız kaç harf diziliminde "e" harfi bulanabileceğini hesaplayalım.

ÇÖZÜM

"e" harfini sonradan yerleştirmek üzere ayıralım.

Kalan 4 harf $\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2}$ şeklinde dizilir. "e" harfini de 4 farklı yere dizebiliriz.

Bu durumda $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ olur.

Etkinlik

Okul sonrası Fahrican, Fatih, Numan, Çağrı ve Ferhat oyun oynamak için sokakta buluşuyorlar.

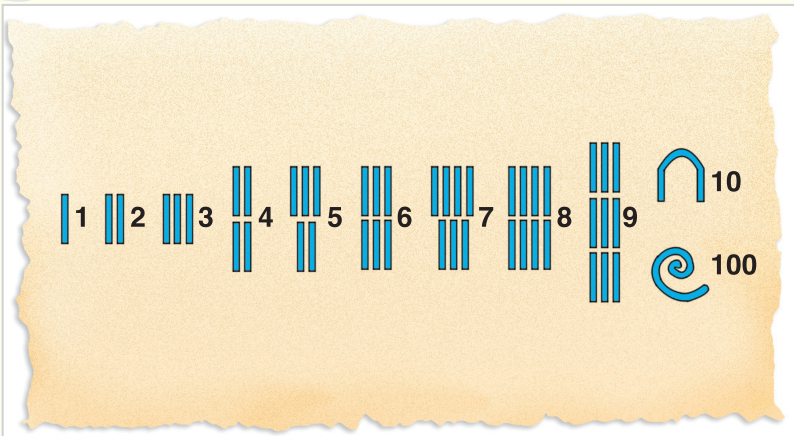
Fahrican “saklambaç”, Fatih “beş taş”, Numan “misket”, Çağrı “birdirbir” ve Ferhat “yakan top” oynamak istiyor.

Zaman kaybetmemek için Ferhat kararlılıkla öne çıkarak bir öneri getiriyor.

“Bu oyunların hepsi en az 1 saat sürer, ama biz 3 saat sonra eve gitmek zorundayız. Çoğunluğun isteği yerine gelsin diye bu 5 oyundan sırayla 3 tanesini ve kalanlarını da yarın oynayabiliriz.” diyor.

✷ Böyle bir uzlaşma durumunda, bu çocukların oyunları kaç farklı sıralama ile oynayabileceklerini bulunuz.

Okuma Metni



Matematiğin ilk eylemi sayı saymadır. Belki de sayılara ilk ihtiyacı olan kişi, koyunlarını otlatan bir çobandı.

Sayı saymak için önce parmakların kullanıldığı tahmin edilmektedir. İlkel sayı sayma yöntemlerinden biri, birçok sayıyı sadece 1 ve 2 kullanarak yazan bir sistemdir. Buna çok benzeyen ikili bir sistem, bugün bilgisayar teknolojisinin temelini oluşturuyor.

Sümercede 1 ve 2 ile “kadın” ve “erkek” aynı sembollerle gösteriliyordu. Üç sayısı 1 ve 2’den çok sonra bulunuyor ve önemli bir çokluk belirttiği için kelimenin anlamını tamamen değiştiriyor. Eski Çin’de anlamı “erkek” olan şekilden üç tane olunca anlam “herkes”, “ağaç” anlamındaki şekilden üç tane olunca anlam “orman” oluyordu. Mısırlılar sayıları, sembolleri yan yana kullanarak gösteriyorlardı. Mesela 9 sayısı için 9 ayrı resim, 99 için 19 ayrı resim, 999 için 27 ayrı resim gerekiyordu.

Kaynakça: Derleme, Matematiğin Aydınlık Dünyası, Sertöz Sinan.

Okuma Metni

SÂBİT İBN KURRÂ (826-901)

Harran'da doğan ve yetişen Sabit İbn Kurrâ dönemin önde gelen matematikçi ve astronomlarından biridir.

Dost sayılar, yani biri, diğerinin çarpanlarının toplamına eşit olan sayılar üzerine yapmış olduğu incelemeler pythagorasçıların (pythagoras: Pisagorculuk akımının kurucusu) sayılar teorisi ile ilgili çalışmalarına aşina olduğunu göstermektedir. Cebiri geometriye başarıyla uygulamıştır.

Temsili resim

Sâbit İbn Kurrâ, Çinlilerden sonra sihirli kareleri inceleyen ilk matematikçidir.

Sihirli Kare: Eşit sayıdaki satır ve sütuna sahip bir kareye yazılan yazıların, satırlar, sütunlar ve köşegenler boyunca toplamının sabit olduğu karelerdir. M.Ö. 2200 yıllarından beri bilinmektedir. Çin'de astroloji, fal bakma, felsefi yorumlama gibi değişik çalışma alanlarında kullanılmıştır. 9 ve 10. Yüzyılda sihirli karelerin, matematiksel özelliklerinin Arap dillerinin konuşulduğu yerlerde çoktan geliştirildiği gözlenmiştir. 19. Yüzyılın sonlarında matematikçiler sihirli kareleri olasılık ve analiz problemlerinde uygulamaya başlamışlardır.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

(Kaynak: www.matematiksel.org)

Faktöriyel

Bilgi

n elemanı birer, ikişer, üçer, ..., n er tane alıp sıralamak istersek;

1 eleman 1 farklı biçimde,

2 eleman $1 \cdot 2$ farklı biçimde,

3 eleman $1 \cdot 2 \cdot 3$ farklı biçimde,

4 eleman $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ farklı biçimde,

. . .

. . .

. . .

n eleman $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n$ farklı biçimde sıralanabilir.

n doğal sayı olmak üzere, 1 den n e kadar olan ardışık doğal sayıların çarpımına **n faktöriyel** denir ve n! şeklinde gösterilir.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n$ şeklinde hesaplanır.

$1! = 1$ dir.

$0! = 1$ kabul edilir.

1

ÖRNEK

a. $\{1\}$ kümesinin elemanı,

b. $\{1,2\}$ kümesinin elemanları,

c. $\{1,2,3\}$ kümesinin elemanlarının kaç farklı şekilde sıralanabileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

a. $\{1\}$ için $\boxed{1}$ çarpma yöntemine göre 1 farklı şekilde,

b. $\{1,2\}$ için $\boxed{2}\boxed{1}$ çarpma yöntemine göre $2 \cdot 1 = 2$ farklı şekilde,

c. $\{1,2,3\}$ için $\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}$ çarpma yöntemine göre $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ farklı şekilde sıralanabilir.

ÖRNEK

$\dfrac{10!}{7!} - \dfrac{20!}{18!}$ işleminin sonucunu bulalım.

ÇÖZÜM

$n! = n \cdot (n-1)!$, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$ veya $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!$ şeklinde yazıldığı düşünülerek;

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} - \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 20 \cdot 19 = 720 - 380 = 340 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\dfrac{(n+2)!}{n!}$ ifadesini sadeleştirelim.

ÇÖZÜM

$$\frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = (n+2) \cdot (n+1) \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\dfrac{n!}{(n-2)!} = 132$ ise n değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 132 \Rightarrow n \cdot (n-1) = 132$$

Ardışık 2 doğal sayının çarpımı 132 ise bu sayılar 12 ile 11 dir. $n = 12$ olmalıdır.

ÖRNEK

8 yakın arkadaş her biri fotoğrafta bulunmak üzere yan yana fotoğraf çektirecektir. Bu yakın arkadaşların kaç farklı poz verebileceklerini bulalım.

ÇÖZÜM

1. sıraya 8, 2. ye 7, 3. ye 6 kişinin yerleştiği şeklinde devam edersek
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$ olur.

ÖRNEK

"AHMET" kelimesindeki harflerin yerlerini değiştirerek anlamlı veya anlamsız kaç harf dizilimi yapabileceğimizi bulalım.

ÇÖZÜM

Her bir sıraya bir harf yazarsak $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ bulunur.

ÖRNEK

Farklı 5 felsefe kitabı ile 4 tarih kitabı bir rafa dizilecektir. Bu kitapların,

a) koşulsuz,

b) aynı dersin kitapları yan yana olmak üzere,

c) felsefe kitapları yan yana olmak koşulu ile kaç değişik şekilde sıralanabileceğini bulalım.

1

ÇÖZÜM

a) 1. sıra için 9, 2. sıra için 8, 3. sıra için 7 seçenek vardır. Bu şekilde dizersek

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9!$ tane koşulsuz sıralama yapılabilir.

b) Aynı dersin kitapları yan yana gelecek şekilde çözüm yapalım.

Felsefe kitapları $\boxed{F_1 \mid F_2 \mid F_3 \mid F_4 \mid F_5}$, tarih kitaplarını da $\boxed{T_1 \mid T_2 \mid T_3 \mid T_4}$ şeklinde bir grup yapalım.

Bu durumda bu iki grup 2!, felsefe kitapları kendi içinde 5!, tarih kitapları kendi içinde 4! şeklinde dizilirse cevap $2! \cdot 5! \cdot 4!$ olur.

c) Soruyu sadece felsefe kitapları yan yana gelecek şekilde çözelim.

Sadece felsefe kitapları yan yana olduğu için $\boxed{F_1 \mid F_2 \mid F_3 \mid F_4 \mid F_5}$, T_1, T_2, T_3, T_4 şeklinde 5 grup oluşur. O hâlde cevap $5! \cdot 5!$ olur.

Alıştırmalar 1-1

1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere A kümesinin elemanları ile ilgili aşağıdaki cümleler doğru ise yay ayraç içine "D", yanlış ise "Y" yazınız.

( ) İki basamaklı 36 sayı yazılabilir.

( ) Üç basamaklı ve rakamları farklı 216 sayı vardır.

( ) 400 den büyük ve 600 den küçük, rakamları farklı 40 sayı vardır.

( ) Üç basamaklı rakamları farklı 150 tek sayı vardır.

2) A kentinden B kentine 5 farklı yol, B kentinden C kentine 3 farklı yol vardır. A kentinden C kentine B kentinden geçmek koşulu ile gidip geriye dönecek olan bir kişi, A kentinden B kentine ve B kentinden C kentine giderken kullandığı yolları dönüşte kullanmamak üzere kaç **farklı** biçimde gidip dönebilir?

A) 225 B) 180 C) 150 D) 120 E) 90

3) 5 farklı bilgisayar oyunu oynayan Ahmet, üst üste 2 gün aynı oyunu oynamamaktadır. Buna göre Ahmet 5 gün içerisinde kaç farklı seçim yapabilir?

4) 3 farklı mektup, 4 posta kutusuna;

a) Koşulsuz kaç farklı şekilde atılabilir?

b) Bir kutuya en çok bir mektup gelecek şekilde kaç farklı durumda atılabilir?

5) 6 kişinin katıldığı yarışta ilk üç derece kaç **farklı** şekilde sonuçlanabilir?

A) 216 B) 180 C) 120 D) 90 E) 60

6) 2 farklı oyuncak 5 çocuğa kaç değişik şekilde dağıtılabilir?

7) $\{0,1,2,3,4,5\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak 5 ile bölünebilen üç basamaklı kaç sayı yazılabilir?

A) 45 B) 60 C) 72 D) 90 E) 120

8) Birbirinden farklı 5 matematik, 6 fizik ve 3 kimya kitabı arasından 1 matematik, 1 fizik ve 1 kimya kitabı almak isteyen bir öğrenci kaç **farklı** seçim yapabilir?

A) 45 B) 60 C) 90 D) 120 E) 150

9) $A=\{3,4,5,6,7\}$ kümesinin elemanları ile küçükten büyüğe, rakamları farklı, 3 basamaklı sayılar yazılacaktır. Buna göre 37. sıradaki sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 567 B) 675 C) 576 D) 645 E) 634

10) $A=\{0,3,4,7,8,9\}$ kümesinin elemanları ile rakamları farklı 3 basamaklı kaç çift sayı yazılabilir?

Permütasyon (Diziliş)

Bilgi

$n, r \in \mathbb{N}$ ve $r \leq n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin birbirinden farklı r tane elemanının her bir dizilişine bu kümenin r li permütasyonu denir. n elemanlı bir kümenin r li permütasyonlarının sayısı $P(n,r)$ ile gösterilir.

$P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ dir.

n farklı elamanın n li dizilişlerinin sayısı $P(n,n)=\dfrac{n!}{(n-n)!}=\dfrac{n!}{0!}=\dfrac{n!}{1}=n!$ şeklindedir.

1

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin 2 li dizilişlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin 2 li dizilişleri

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3) şeklinde olup 12 tanedir.

$P(4, 2) = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$ olur.

ÖRNEK

10 kişiden herhangi ikisinin 2 kişilik bir koltuğa kaç farklı şekilde oturabileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

I. yol

$P(10, 2) = \dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 90$ olur.

II. yol

Çarpma yöntemine göre;

1. yere 10 kişiden biri, 2. yere 9 kişiden biri gelebilir.

Bu durumda $10 \cdot 9 = 90$ olur.

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak aşağıdaki soruları cevaplayalım:

a) 4 lü permütasyonlarının sayısı kaçtır?

b) İçinde 3 olmayan 4 lü permütasyonlarının sayısı kaçtır?

c) İçinde 3 olan 4 lü permütasyonlarının sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM

a) 6 elemandan 4 tanesinin diziliş sayısı $P(6, 4) = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{720}{2!} = 360$ olur.

b) "3" olmazsa kalan 5 elemandan 4 tanesinin diziliş sayısını hesaplarız.

$P(5, 4) = \dfrac{5!}{(5-4)!} = 120$ olur.

c) Tüm 4 lü diziliş sayılarından içinde 3 olmayan 4 lü diziliş sayılarını çıkarırız.

$P(6, 4) - P(5, 4) = 360 - 120 = 240$ olur. Diğer bir çözüm şekli aşağıdaki gibidir:

$(3, ?, ?, ?), (?, 3, ?, ?), (?, ?, 3, ?), (?, ?, ?, 3)$ olmak üzere 3 sayısını 4 farklı durumda yerleştirebiliriz.

Bu durumda $4 \cdot P(5, 3)$ olur. Yani $4 \cdot 60 = 240$ olur.

ÖRNEK

4 farklı gömlek ve 5 farklı yeleğin bir vitrinde, gömleklerden herhangi ikisi yan yana gelmemek üzere kaç değişik şekilde sıralanabileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

	Y		Y		Y		Y		Y	

Yelekleri önce sıralarsak $P(5,5)=5!$ sıralama sayısı olur.

Yelekleri dizdikten sonra gömleklerin yan yana gelmemeleri için yukarıdaki gibi düşünürsek 6 boş yer kalır.

Bu durumda 1. gömlek için 6 yer, 2. gömlek için 5, 3. gömlek için 4, 4. gömlek için 3 yer kalmış olur.

Gömlekleri $P(6,4)=6\cdot5\cdot4\cdot3$ farklı şekilde dizeriz.

O hâlde 4 farklı gömlek ve 5 farklı yelek istenilen koşulda $5!\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3$ farklı şekilde dizilebilir.

ÖRNEK

Aralarında Müge ve Duygu'nun da bulunduğu 6 kişilik bir grup fotoğraf çektirecektir. Müge ve Duygu'nun yan yana gelmemesi koşulu ile bu kişilerin kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebileceklerini bulalım.

ÇÖZÜM

6 kişinin koşulsuz diziliş sayısından Müge ve Duygu'nun yan yana olduğu durum sayısını çıkaralım.

Koşulsuz $P(6,6)=6!=720$ farklı durum vardır. Duygu ve Müge'yi bir kişi olarak düşünürsek kalan 4 kişi ile 5 kişi olurlar. Bu 5 kişinin kendi aralarında sıralanış durumu $P(5,5)=5!=120$ dir.

Duygu ve Müge kendi aralarında $P(2,2)=2!=2$ farklı şekilde sıralanacaklarından toplam diziliş sayısı $5!\cdot2!=240$ tanedir.

Koşulsuz 720 farklı dizilişten Müge ve Duygu'nun yan yana gelmesi koşulu olan 240 farklı dizilişi çıkarırsak $720-240=480$ farklı diziliş buluruz.

Alıştırmalar 1-2

1) 4 evli çift, evli çiftler yan yana gelmek koşulu ile kaç değişik şekilde sıralanabilir?

A) 18 B) 24 C) 48 D) 96 E) 384

2) 4 çocuk ve 3 anneden oluşan bir grup, yan yana dizilmiş olan 7 sandalyeye baştaki ve sondaki sandalyelere anneler gelmemek koşuluyla kaç farklı şekilde oturabilir?

3) $\{a, b, c, d, e\}$ kümesi veriliyor. Buna göre aşağıda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

a) Bu kümenin 2 li permütasyonlarının sayısı ....

b) Bu kümenin 3 lü permütasyonlarının sayısı ....

c) 2 li permütasyonlarının içinde a bulunanlarının sayısı ....

ç) 2 li permütasyonlarının içinde a ve b den yalnız biri bulunanların sayısı ....

d) 3 lü permütasyonlarının içinde hem a hem b bulunanların sayısı ....

4) $P(n, 3) = 4 \cdot P(n, 2)$ ise n kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

5) Farklı 4 kırmızı kalem ile yine farklı 3 yeşil kalem, yeşiller yan yana olmak üzere kaç **farklı** şekilde dizilir?

A) 120 B) 240 C) 360 D) 520 E) 720

6) $\{0, 3, 5, 7, 9\}$ kümesinin elemanları ile yazılabilen 3 basamaklı ve rakamları farklı 5 ile bölünebilen kaç sayı vardır?

A) 12 B) 18 C) 21 D) 24 E) 30

7) "İSTANBUL" kelimesinin harfleri kullanılarak üç harfli kaç farklı diziliş yapılabilir?

8) 3 farklı mektup, 4 posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabilir?

Tekrarlı Permütasyon

Etkinlik

✷ △, □, ○ sembollerini yan yana kaç değişik biçimde sıralayabilirsiniz? Elde ettiğiniz sonuca nasıl vardınız?

✷ Sembollerden ○ yerine △ olsaydı sonuç aynı olur muydu? Neden?

✷ Sembollerin hepsi aynı olursa kaç farklı sıralama yapılabilir? Nedenini açıklayınız.

✷ 3 farklı nesnenin diziliş sayısı ile ikisi aynı 3 nesnenin dizilişi sayısı arasında nasıl bir bağıntı vardır? Aynı olan nesneler diziliş sayısını kaç kat azaltıyor? Açıklayınız.

✷ 5 farklı sembolün diziliş sayısı ile 3 tanesi aynı 5 sembolün diziliş sayısı arasında nasıl bir bağıntı vardır?

✷ Yukarıdaki son iki sorudan yola çıkarak nasıl bir sonuca vardınız? Açıklayınız.

ÖRNEK

A, B, C, D, E ve A, A, A D, E harflerinin kaçar farklı şekilde dizilebileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

ABC	AAA
ACB	AAA
BAC	AAA
BCA	AAA
CAB	AAA
CBA	AAA
$3! = 6$	$\frac{3!}{3!} = 1$

A, B, C, D ve E harflerini 5! = 120 değişik şekilde sıralayabiliriz.

A, A, A, D, E harflerinin dizilişlerinde aynı olan harflerin kendi aralarındaki yer değişimlerinin oluşturduğu dizilişler aynı olur. A, A, A harfleri yerine A, B, C harfleri olsaydı bu harflerin kendi arasında 3! değişik dizilişi olacaktı. Bu nedenle A, A, A, D, E harfleri kendi aralarında $\frac{5!}{3!} = 20$ değişik şekilde dizilebilir.

Bilgi

n tane nesnenin n_1 tanesi, n_2 tanesi, ..., n_r tanesi kendi aralarında özdeş ve $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_r = n$ olsun. Bu durumda n tane nesnenin farklı permütasyonlarının sayısı $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot ... \cdot n_r!}$ ile bulunur.

1

ÖRNEK

"ALABALIK" kelimesindeki harflerle birbirinden farklı kaç tane 8 harfli anlamlı veya anlamsız harf dizilimi yapabileceğimizi bulalım.

ÇÖZÜM

Dizilimdeki 8 harf de birbirinden farklı olsaydı 8! değişik dizilim yazılabilirdi. Fakat 3 tane A harfi kendi aralarında yer değişse bile oluşan dizilişler aynı olur. Aynı şekilde 2 tane L harfinin de kendi aralarında yer değişmesi ile oluşan dizilişler de aynı olacaktır. Bu nedenle

$\frac{8!}{2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3!}} = 3360$ tane harf dizilimi yapılabilir.

ÖRNEK

ATATÜRK kelimesinin harfleri kullanılarak 7 harfli kaç farklı harf diziliminin oluşturulabileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

ATATÜRK kelimesinde 2 tane A, 2 tane T olduğundan $\frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$ tane bulunur.

ÖRNEK

"KATARAKT" kelimesinin harfleriyle K ile başlayıp K ile biten 8 harfli kaç harf dizilimi yapabileceğimizi bulalım.

ÇÖZÜM

İlk ve son harfler K olduğu için geriye kalan 6 harf için tekrarlı permütasyon sayısını veren formülü kullanarak,

$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2}} = 60$ bulunur.

ÖRNEK

2333232 sayısındaki rakamları kullanarak 7 basamaklı kaç farklı sayı yazabileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

2333232 sayısında 3 tane 2, 4 tane 3 rakamı bulunmaktadır. Bu nedenle 2333232 sayısındaki rakamların yer değiştirilmesi ile 7 basamaklı $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{4!}} = 35$ farklı sayı yazılabilir.

ÖRNEK

788668 sayısının rakamları kullanılarak 6 basamaklı, 7 ile başlayıp 6 ile bitmeyen kaç tane sayı olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

7 ile başlayanların sayısından 7 ile başlayıp 6 ile bitenlerin sayısını çıkararak sonucu bulabiliriz. İlk önce 7 ile başlayan kaç farklı sayı yazabileceğimizi bulalım. İlk rakam 7 olacağından geriye kalan 5 rakam için tekrarlı permütasyon sayısını veren formülü kullanırsak

$\frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot \cancel{3!}}{\cancel{2}\cdot \cancel{3!}} = 10$ farklı sayı yazılabilir.

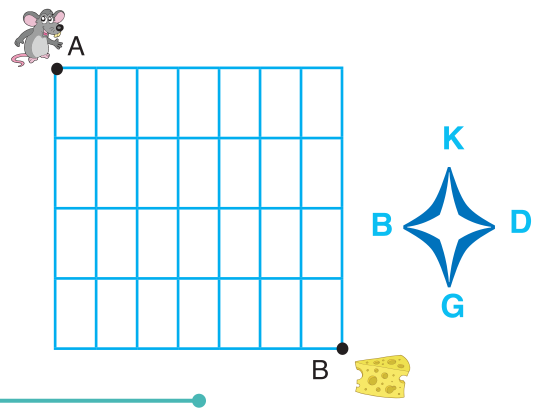
7 ile başlayan 10 sayı içinden kaç tanesinin 6 ile bitmediğini bulmak için de 6 ile biten sayıların kaç tane olduğunu düşünelim. Önce 7 ile 6 kullanıldığından kalan 4 rakam ile kaç farklı sayı yazılabileceğini bulalım.

$\frac{4!}{3!} = \frac{4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4$ farklı sayı yazılabilir.

Bu durumda 7 ile başlayıp 6 ile bitmeyen sayıların sayısı $10 - 4 = 6$ olur.

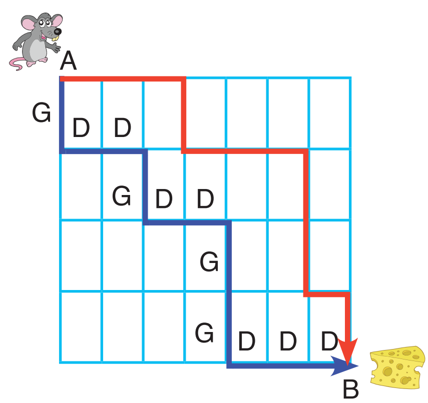
ÖRNEK

Çizgilerin üzerinden giderek en kısa yolu izlemek koşulu ile A noktasında bulunan bir farenin B noktasındaki peynire kaç farklı şekilde ulaşabileceğini bulalım.



ÇÖZÜM

A dan B ye her kısa yol 4 tane G ve 7 tane D den oluşan bir harf dizisidir. Yolun değişmesi sadece bu harflerin kendi aralarında yer değiştirmesi demektir. Yandaki şekilde iki tanesi GDDGDDGGDDD ve DDDGDDDGGDG olarak verilen harf dizisi de bunlardan ikisidir.



4 tane G, 7 tane D harfinden oluşan 11 tane harfin kendi arasında diziliş sayısı tekrarlı permütasyon sayısını veren formül ile bulunabilir. Bu durumda fare peynire

$\frac{11!}{4!\cdot 7!} = \frac{11\cdot 10\cdot \cancel{9}^{3}\cdot \cancel{8}\cdot \cancel{7!}}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{7!}} = 330$ tane farklı yoldan ulaşır.

ÖRNEK

22523353 sayısının rakamlarını kullanarak 8 basamaklı;

a) Kaç farklı sayı yazılabileceğini,

b) Kaç farklı çift sayı yazılabileceğini,

c) 5 ile başlayıp 2 ile biten kaç farklı sayı yazılabileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

a) $\dfrac{8!}{2!\cdot 3!\cdot 3!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \overset{2}{\cancel{4}}\cdot \cancel{3!}}{\cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3!}} = 560$ farklı sayı yazılabilir.

b) Son basamağı 2 olacağından geri kalan 7 rakam ile kaç farklı sayı yazılabileceğini buluruz. Bu durumda,

$\dfrac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 3!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3!}}{\cancel{2}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3!}} = 210$ farklı çift sayı yazılabilir.

c) 5 ile başlayıp 2 ile biteceğinden geriye kalan 6 rakam ile kaç farklı sayı yazılabileceğini buluruz. Buradan;

$\dfrac{6!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot \overset{2}{\cancel{4}}\cdot \cancel{3!}}{\cancel{2}\cdot \cancel{3!}} = 60$ farklı sayı yazılabilir.

Alıştırmalar 1-3

1) "SAYISAL" kelimesinin harfleri kullanılarak anlamlı ya da anlamsız 7 harfli kaç farklı harf dizilimi yazılabilir?

2) "PARAMPARÇA" kelimesinin harfleri kullanılarak R ile başlayan, A ile biten 10 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç farklı harf dizilimi yazılabilir?

3) "KELEBEK" kelimesinin harfleri kullanılarak K ile başlayan, E ile bitmeyen anlamlı veya anlamsız, 7 harfli kaç farklı harf dizilimi yazılabilir?

4) 20055444 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek 8 basamaklı kaç çift sayı yazılabilir?

Kombinasyon (Seçme)

Bilgi

n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin her birine **n nin r li kombinasyonu** denir.

$n, r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r elemanlı kombinasyonlarının sayısı $C(n,r)$ veya $\binom{n}{r}$ ile gösterilir. $C(n,r) = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-1)\cdot r!}$ olur.

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{n-r} = \dfrac{n!}{(n-(n-r))!\cdot(n-r)!} = \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \binom{n}{r}$
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$
- $P(n,r) = r!\cdot C(n,r)$

- Kombinasyonda sıralamanın önemi yoktur; n elemanın r li seçimleri söz konusudur. Permütasyonda ise sıralı diziliş vardır.

Bilgi

n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı $\binom{n}{r}$ ile hesaplanır.

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadelerin sonuçlarını bulalım.

a) $\binom{6}{0}$ **b)** $\binom{10}{2}$ **c)** $\binom{7}{4}$

ÇÖZÜM

a) 6 elemanlı bir kümenin sıfır elemanlı alt kümesi boş kümedir. O da 1 tanedir. $\binom{6}{0} = 1$ olur.

b) $\binom{10}{2} = \dfrac{10!}{8!\cdot 2!} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8!}{2\cdot 1\cdot 8!} = 45$ olur.

c) $\binom{7}{4} = \dfrac{7!}{4!\cdot 3!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$ olur.

1

ÖRNEK

$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=28$ ise n kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=28 \Rightarrow n+\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}=28 \Rightarrow n+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-2)!\cdot 2}=28$$

$$\Rightarrow n+\frac{n\cdot(n-1)}{2}=28 \Rightarrow \frac{(n+1)\cdot n}{2}=28$$

$(n+1)\cdot n=56 \Rightarrow$ Ardışık iki doğal sayının çarpımı 56 ise $8\cdot 7=56$ olur. Yani $n=7$ bulunur.

ÖRNEK

$A=\{a, b, c, d, e, f\}$ kümesi verilsin. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayalım.

A kümesinin;

a) 3 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

b) 3 elemanlı kaç alt kümesinde "a" bulunur?

c) 3 elemanlı kaç alt kümesinde hem "a" hem "b" bulunur?

ç) 3 elemanlı kaç alt kümesinde "a" bulunur, "b" **bulunmaz**?

ÇÖZÜM

a) 6 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı,

$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20$ olur.

b) "a" bulunan 3 elemanlı alt kümeleri $\{a, ?, ?\}$ ile gösterelim. "a" kesin olarak yer aldığı için "a" nın haricindeki elemanlardan iki tane seçmemiz yeterlidir.

Bu durumda a nın dışındaki 5 elemandan 2 tane elemanı $\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$ farklı biçimde seçeriz.

c) Hem "a" hem de "b" nin bulunduğu 3 elemanlı alt kümeleri $\{a, b, ?\}$ ile gösterelim.

O hâlde a ve b hariç geriye kalan 4 elemandan 1 taneyi $\binom{4}{1}=4$ farklı biçimde seçeriz.

ç) "a" nın bulunduğu 3 elemanlı alt kümeleri $\{a, ?, ?\}$ ile gösterelim.

"a" hariç 5 eleman kalır. "b" de bu seçimde yer almayacağına göre 4 elemandan 2 tane seçmeliyiz.

Bu durumda $\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=6$ olur.

ÖRNEK

6 kişiden 2 kişilik kaç ekip oluşturabileceğimizi bulalım.

ÇÖZÜM

$\binom{6}{2}=\frac{6!}{(6-2)!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2\cdot 1}=\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=15$ ekip oluşturabiliriz.

ÖRNEK

$\{1, 2, 3\}$ kümesinin alt kümelerini bularak n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısının 2^n ile hesaplandığını gösterelim.

ÇÖZÜM

$\{\ \} \longrightarrow$ Sıfır elemanlı alt küme sayısı: $\binom{3}{0} = 1$

$\{1\}, \{2\}, \{3\} \longrightarrow$ Bir elemanlı alt küme sayısı: $\binom{3}{1} = 3$

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \longrightarrow$ İki elemanlı alt küme sayısı: $\binom{3}{2} = 3$

$\{1, 2, 3\} \longrightarrow$ Üç elemanlı alt küme sayısı: $\binom{3}{3} = 1$

Bu durumda tüm alt kümelerin sayısı: $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3$ olur.

Dolayısıyla n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısı,

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$ olur.

Aynı hesabı saymanın temel ilkesi ile yapabiliriz.

$\{a, b\}$ kümesini ele alalım. Elemanın alt kümede olmadığını 0 ile, alt kümede olduğunu ise 1 ile gösterelim.

$$\left.\begin{array}{l} \{a, b\} \\ \downarrow \ \downarrow \\ 0 \ 0 \longrightarrow \{\ \} \\ 1 \ 0 \longrightarrow \{a\} \\ 0 \ 1 \longrightarrow \{b\} \\ 1 \ 1 \longrightarrow \{a, b\} \end{array}\right\}$$

Buradan yola çıkarak a nın olması ve olmaması gibi 2 durumu vardır.
Aynı şekilde b nin de 2 durumu vardır.
Dolayısıyla $2 \cdot 2 = 2^2$ durum söz konusudur.

$\{a, b, c\}$ kümesini alırsak;

$$\begin{array}{l} \{a, b, c\} \\ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \\ 0 \ 0 \ 0 \longrightarrow \{\ \} \\ 1 \ 0 \ 0 \longrightarrow \{a\} \\ 0 \ 1 \ 0 \longrightarrow \{b\} \\ 0 \ 0 \ 1 \longrightarrow \{c\} \\ 1 \ 1 \ 0 \longrightarrow \{a, b\} \\ 1 \ 0 \ 1 \longrightarrow \{a, c\} \\ 0 \ 1 \ 1 \longrightarrow \{b, c\} \\ 1 \ 1 \ 1 \longrightarrow \{a, b, c\} \end{array}$$

a, b ve c den her biri için “olma ve olmama” şeklinde 2 durum vardır.

O hâlde $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ olur. n tane eleman için $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{n \text{tane}} = 2^n$ durum olur.

ÖRNEK

10 kişilik bir grup olsun. Aşağıdaki soruları çözelim:

a) Rastgele 3 kişi kaç farklı şekilde seçilebilir?

b) Bir başkan, bir başkan yardımcısı ve bir de sekreter olması koşuluyla kaç farklı seçim yapılabilir?

ÇÖZÜM

a) Rastgele 3 kişi $\binom{10}{3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ farklı şekilde seçilebilir.

b) Bu seçimi 2 farklı yoldan hesaplayalım.

I. yol

10 kişiden bir başkan, 10 farklı şekilde seçilebilir.

Geriye kalan 9 kişiden başkan yardımcısı, 9 farklı şekilde ve son olarak kalan 8 kişiden bir sekreter, 8 farklı şekilde seçilebilir.

Bu durumda çarpma yöntemine göre $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ farklı seçim yapılabilir.

II. yol

Öncelikle üç kişinin seçim sayısı $\binom{10}{3} = 120$ farklı şekilde olur.

Bu üç kişinin başkan, başkan yardımcısı ve sekreter olarak görevlendirilme sayısı $3! = 6$ olduğundan $\binom{10}{3} \cdot 3! = 120 \cdot 6 = 720$ farklı şekilde bir başkan, bir başkan yardımcısı ve bir de sekreter seçebiliriz.

ÖRNEK

5 fizikçi ve 3 matematikçi arasından 3 kişilik komisyon seçilecektir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayalım:

a) Koşulsuz kaç farklı seçim yapılabilir?

b) Komisyonda matematikçi olmamak üzere kaç farklı seçim yapılabilir?

c) Komisyonda 1 tane matematikçi olmak üzere kaç farklı seçim yapılabilir?

ÇÖZÜM

a) Koşulsuz dediği için 8 kişiden 3 kişi rastgele seçilecektir.

$\binom{8}{3} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ olur.

b) Matematikçi olmayacaksa tüm seçim fizikçilerden yapılır.

$\binom{5}{3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ olur.

c) Matematikçilerden 1 kişi olacaksa kalan 2 kişi fizikçilerden seçilir.

$\binom{3}{1}\binom{5}{2} = 3 \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 30$ olur.

ÖRNEK

Depremden zarar görmüş olan bir şehrimize sağlık hizmetleri vermek üzere 6 doktor ve 4 hemşire arasından ikisi doktor ve ikisi hemşire olmak üzere 4 kişilik ekip oluşturulacaktır. Doktorlardan belirli bir kişi gönüllü olarak bu yardım ekibi içinde kesin olarak yer alacaksa kaç değişik seçim yapılabileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

1 doktor belli (yani seçilmesi kesin) olduğundan 1 doktor seçimi yeterlidir. Doktorlardan birini ayırırsak 5 doktor kalır.

O hâlde $\binom{5}{1} = 5$ farklı yolla doktor seçilebilir.

4 hemşireden 2 tanesi de $\binom{4}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ farklı yolla seçilir.

O hâlde istenilen koşullarda $\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2} = 5 \cdot \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 6 = 30$ farklı seçim yapılabilir.

ÖRNEK

5 matematik ve 3 fizik kitabı arasından 3 kitap seçilecektir.

a) Bu üç kitaptan 1 i matematik, 2 si fizik olmak üzere kaç değişik seçim yapılabileceğini,

b) En az biri matematik kitabı olmak üzere kaç değişik seçim yapılabileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

a) 5 matematik kitabından 1 tane ve 3 fizik kitabından 2 tane olmak üzere 3 kitabı

$\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{2} = 5 \cdot \dfrac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 15$ farklı şekilde seçebiliriz.

b) En az 1 tanesinin matematik kitabı olması için seçilen matematik kitaplarının sayısı 1 veya 1 den fazla olmalıdır. Bu durumda

$\binom{5}{1}\binom{3}{2} + \binom{5}{2}\binom{3}{1} + \binom{5}{3} = 5 \cdot \dfrac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} + \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 3 + \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 55$ farklı seçim yapabiliriz.

Bununla birlikte en az 1 matematik kitabı seçmek, tüm seçimlerin içinde 3 ünün de fizik kitabı olduğu seçimlerin olmaması demektir.

O hâlde ikinci yol olarak $\binom{8}{3} - \binom{3}{3} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} - 1 = 55$ şeklinde de bulabiliriz.

ÖRNEK

5 farklı mavi bilye ve yine 4 farklı kırmızı bilye arasından içinde en az bir kırmızı bilye bulunan 4 bilyeyi kaç değişik şekilde seçebileceğimizi bulalım.

ÇÖZÜM

Toplam 9 bilyenin 4 lü seçimlerinden, 4 ünün de mavi olduğu seçimleri çıkarırsak içinde en az 1 kırmızı bilyenin bulunduğu 4 bilyeyi seçmiş oluruz.

O hâlde $\binom{9}{4}-\binom{5}{4}=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}-5=121$ değişik şekilde seçim yapabiliriz.

ÖRNEK

$A=\{1,3,5,7,9\}$ ve $B=\{2,4,6,8\}$ olmak üzere A dan 2, B den 3 eleman alarak kaç tane 5 basamaklı sayı yazabileceğimizi bulalım.

ÇÖZÜM

A dan 2 eleman $\binom{5}{2}$ yolla, B den 3 eleman $\binom{4}{3}$ yolla seçilebileceğinden bu 5 rakam, $\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{3}$ yolla seçilir. Seçilen 5 rakam, 5! farklı şekilde sıralanır.

O hâlde $\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{3}\cdot 5!=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot4\cdot120=4800$ tane sayı yazabiliriz.

ÖRNEK

Düzlemde herhangi 3 ü doğrusal olmayan 8 nokta veriliyor.

a) Köşeleri bu noktalar olacak şekilde en çok kaç farklı üçgen oluşturulacağını,

b) Herhangi iki nokta ile en çok kaç farklı doğru oluşturulacağını bulalım.

ÇÖZÜM

a) Doğrusal olmayan 3 nokta bir üçgen belirteceği için $C(8,3)=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ tane üçgen buluruz.

b) 2 nokta bir doğru belirttiğinden $C(8,2)=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$ tane doğru buluruz.

ÖRNEK

Düzlemde herhangi 2 si paralel olmayan 9 farklı doğrunun en çok kaç noktada kesişebileceğini bulalım.

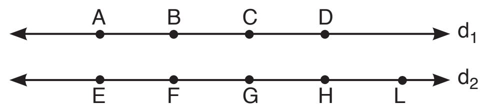
ÇÖZÜM

2 doğru 1 noktada kesişebileceğinden 9 doğrudan herhangi 2 doğru seçimi bize cevabı verir.

$\binom{9}{2}=\dfrac{9\cdot8}{2\cdot1}=36$ olur.

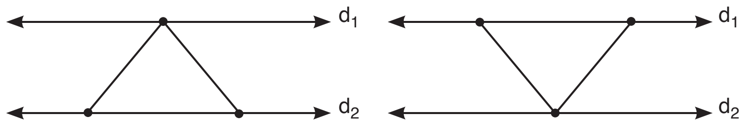
ÖRNEK

Yandaki şekilde d_1 doğrusu üzerinde 4 nokta, d_2 doğrusu üzerinde 5 nokta vardır. $d_1 \parallel d_2$ ise köşeleri bu 9 noktadan üçü olacak şekilde en çok kaç üçgen oluşturabileceğimizi bulalım.



ÇÖZÜM

Yandaki şekle göre düşünürsek tabanın d_1 ve d_2 doğruları üzerinde bulunduğu iki durum vardır.



Buna göre tabanı d_2 doğrusu üzerinde alırsak $\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2}$ tane üçgen, tabanı d_1 doğrusu üzerinde alırsak $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1}$ tane üçgen ve toplamda

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1} = 4 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 5 = 40 + 30 = 70 \text{ tane üçgen oluşturabiliriz.}$$

$$\text{Veya } \binom{9}{3} - \binom{4}{3} - \binom{5}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} - 4 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \text{ şeklinde de sonuç bulunabilir.}$$

Alıştırmalar 1-4

1) 5 erkek, 4 kadın arasından 2 si erkek ve 3 ü kadın olmak üzere 5 kişilik çalışma ekibi kaç **değişik** şekilde seçilebilir?

A) 40 B) 50 C) 60 D) 70 E) 80

2) Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) $\binom{8}{2}$ **b)** $\binom{9}{3}$ **c)** $\binom{10}{2}$

ç) $\binom{n}{0}$ **d)** $\binom{n}{1}$ **e)** $\binom{n}{n}$

3) Aşağıdaki ifadeler doğru ise yay ayraç içine "D", yanlış ise "Y" yazınız.

( ) 5 kişiden herhangi 2 kişi 15 farklı şekilde seçilebilir.

( ) 4 elemanlı bir kümenin en az bir elemanlı alt küme sayısı 15 tir.

( ) Herhangi 3 ü doğrusal olmayan 5 noktadan üçü köşesi olacak şekilde en çok 15 tane üçgen oluşturulabilir.

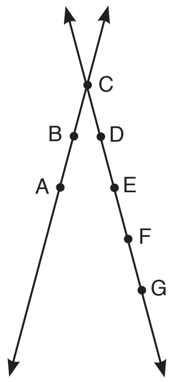
( ) $\binom{15}{2} = \binom{15}{3}$

( ) $\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 32$

4) 6 kişi içerisinden 3 kişilik bir ekip oluşturulacaktır. Ancak belirli iki kişi bu ekip içinde aynı anda bulunmayacağına göre kaç **farklı** ekip oluşturulabilir?

A) 6 B) 10 C) 12 D) 15 E) 16

5)



Şekildeki 7 noktanın üçü üçgenin köşesi olacak şekilde en çok kaç tane üçgen oluşturulur?

A) 42 B) 35 C) 24 D) 21 E) 18

6) 5 kişinin katıldığı bir sınav, başarı yönünden kaç farklı şekilde sonuçlanabilir?

A) 120 B) 90 C) 60 D) 48 E) 32

7) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesindeki elemanlarla 1 rakamı çift, 2 rakamı tek ve rakamları farklı 3 basamaklı kaç sayı yazılabilir?

A) 454 B) 240 C) 180 D) 120 E) 60

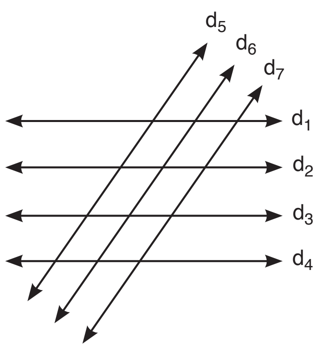
8) 7 kişiden 4 lü ve 3 lü 2 grup oluşturulacaktır. Belirli iki kişi aynı grupta olmak üzere kaç farklı gruplama yapılabilir?

A) 15 B) 24 C) 32 D) 40 E) 42

9) Bir düzlemde bulunan 7 doğrudan 3 tanesi paraleldir. Bu doğrular en fazla kaç noktada kesişebilir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 18 E) 20

10)



Şekilde $d_1 \mathbin{/\!/} d_2 \mathbin{/\!/} d_3 \mathbin{/\!/} d_4$ ve $d_5 \mathbin{/\!/} d_6 \mathbin{/\!/} d_7$ ise kaç farklı paralelkenar vardır?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Okuma Metni

ÖMER HAYYAM (1048-1131)

Temsili resim

Ömer Hayyam, zamanında daha çok bilgin olarak ün kazandı. İran'ın Selçuklular yönetiminde olduğu bir çağda yetişen Hayyam, Horasan ülkesindeki büyük şehirleri, Belh, Buhara ve Merv gibi bilim merkezlerini gezdi, bir ara Bağdat'a da gitti. Zamanının hükümdarlarından, özellikle Selçuklu Sultanı Melikşah ve Karahanlı Şemsülmülk'ten büyük yakınlık gördü. Saraylarında, meclislerinde bulundu. Reşidüddin'in "Cami-üt-Tevarih" adlı eserinde anlattığına göre Ömer Hayyam ile okul arkadaşıydılar.

Hayyam'ın fizik, metafizik, matematik, astronomi ve şiir konularında çeşitli eserleri vardır. Bunlar arasında İbni Sina'nın Temcid (Yüceltme) adlı eserinin yorum ve tercümesi de yer alır. Zamanında bir bilgin olarak ün kazanan Ömer Hayyam'ın edebiyat tarihindeki yerini belirleyen, sonraki yüzyıllarda Doğu İslam dünyasının en büyük şairlerinden biri olarak anılmasına yol açan Rubaiyat'ıdır (Dörtlükler).

Öğrenimini tamamlayan Ömer Hayyam, günümüze ulaşmayan pek çok kitabının yanı sıra kendisine büyük ün ve saygınlık kazandıran Cebir Risaliyesi'ni ve Rubaiyat'ı kaleme almıştır.

On bölümden oluşan Cebir Risaliyesi'nde üçüncü dereceden denklemleri incelemiş ve bu denklemleri sınıflandırmıştır. Matematik bilgisi ve yeteneği zamanın çok ötesinde olan Ömer Hayyam, denklemlerle ilgili başarılı çalışmalar yapmış ancak negatif, kesirli ve sanal kökleri görememiştir. Sadece pozitif köklere ulaşmayı başaran Hayyam ayrıca üçüncü dereceden denklemlerin en fazla iki kökünü bulabilmiştir. Ayrıca Pascal (Paskal) üçgeni olarak bilinen üçgenle ilgili de bir kitap yazdığı bilinmektedir.

Aralarında Ömer Hayyam'ın da bulunduğu Hint, Çin, İslam medeniyetlerindeki matematikçi ve düşünürler, Pascal Üçgeni olarak adlandırılan kavramı Pascal'dan daha önce ele almışlardır. Bu bağlamda matematiksel bilginin oluşumunda farklı kültür ve bilim insanlarının rolü olmuştur.

(Kısaltılarak düzenlenmiştir.)

(Kaynak: Meydan Larousse, Cilt 8, S. 536.)

"Ey sevginin sırlarından habersiz yaşayanlar!
Bilin ki tüm varlığın baş kaynağı sevgidir, sevgi…"

"Yalnız bilgili olmak değil, adam olmak;
Vefalı değil mi insan, ona bak.
Yücelerin yücesine yükselirsin,
Halka verdiğin sözün eri olarak."

Pascal Üçgeni

Pascal üçgeninin her satırı 1 ile başlar ve 1 ile biter. 1 lerin dışındaki elemanların her biri bir üst satırda kendine komşu olan iki sayının toplamıyla elde edilir.

$$\binom{0}{0} \longleftrightarrow 1$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \longleftrightarrow 1 \quad 1$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \longleftrightarrow 1 \quad 2 \quad 1$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \longleftrightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \longleftrightarrow 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

Pascal üçgeninden yararlanarak $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=\binom{4}{2}$ olduğu görülmektedir.

Binom Açılımı

Bilgi

$n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$ olmak üzere $(a+b)^n$ ifadesinin açılımına **Binom açılımı** denir.

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n \cdot b^0+\binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1+\binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2+\ldots+\binom{n}{n}a^0 \cdot b^n$$

$$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^n \cdot (-b)^0+\binom{n}{1}a^{n-1} \cdot (-b)^1+\binom{n}{2}a^{n-2} \cdot (-b)^2+\ldots+\binom{n}{n}a^0 \cdot (-b)^n$$

Buna göre

- Açılım yapıldığında terim sayısı $(n+1)$ dir. (Toplanan her ifade terimdir.)
- a nın kuvvetleri azalırken b nin kuvvetleri artar.
- Her bir terimde kuvvetler toplamı n dir.
- $\binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot b^r$ terimi genel terimdir. Aynı zamanda baştan $(r+1)$. terim ve sondan da $(n-r+1)$. terim olur.
- Açılımın katsayılar toplamını bulmak için değişkenlerin yerine 1 yazılır.
- Açılımın sabit terimini bulmak için değişkenlerin yerine 0 (sıfır) yazılır.

ÖRNEK

$(a+b)^6$ açılımını yapalım.

ÇÖZÜM

$$(a+b)^6=\binom{6}{0}a^6+\binom{6}{1}a^5b+\binom{6}{2}a^4b^2+\binom{6}{3}a^3b^3+\binom{6}{4}a^2b^4+\binom{6}{5}ab^5+\binom{6}{6}b^6$$

$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$ olur.

ÖRNEK

$(a-b)^5$ açılımını Pascal üçgeni ve Binom açılımı ile yapalım.

ÇÖZÜM

$(a-b)^5$ de katsayılar

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$(a-b)^5 \longleftrightarrow$ 1 5 10 10 5 1

$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$ olur.

$$(a-b)^5=\binom{5}{0}a^5\cdot(-b)^0+\binom{5}{1}a^4\cdot(-b)^1+\binom{5}{2}a^3\cdot(-b)^2+\binom{5}{3}a^2\cdot(-b)^3+\binom{5}{4}a^1\cdot(-b)^4+\binom{5}{5}a^0\cdot(-b)^5$$

Etkinlik

Pascal Üçgeni

$(a+b)^0=1 \longleftrightarrow$ 1

$(a+b)^1=a+b \longleftrightarrow$ 1 1

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \longleftrightarrow$ 1 2 1

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \longleftrightarrow$ 1 3 3 1

◈ Yukarıda solda verilen özdeşliklerle Pascal üçgenini ilişkilendiriniz.

◈ $(a+b)^4$ ve $(a-b)^4$ açılımlarını bulunuz.

✷ Her açılımın terim sayısını, açılımın kuvvetine göre bulabilir misiniz?

1

Bilgi

$(a+b)^{2n}$ açılımında ortadaki terim $r = n$ alınarak $\binom{2n}{n} a^n \cdot b^n$ bulunur.

ÖRNEK

$(2a-b)^6$ açılımına göre;

a) Terim sayısını,

b) Ortadaki terimi,

c) Baştan 3. terimin katsayısını,

ç) Sondan 2. terimin katsayısını bulalım.

ÇÖZÜM

a) Terim sayısı $6+1=7$ olur.

b) $r = \frac{6}{2} = 3$ alırsak,

$\binom{6}{3} \cdot (2a)^3 \cdot (-b)^3$ ifadesi ortadaki terimi verir.

$$\frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} \cdot 8a^3 \cdot (-b)^3 = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} \cdot 8a^3 \cdot (-b)^3 = -160a^3b^3 \text{ olur.}$$

c) Baştan 3. terim için $r = 2$ alınır.

Yani $\binom{6}{2} \cdot (2a)^4 \cdot (-b)^2 = 15 \cdot 2^4 \cdot a^4 \cdot b^2 = 240a^4b^2$ olur ve katsayısı 240 tır.

Veya $(2a-b)^6$ açılımının Pascal üçgenindeki katsayıları 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 dir. Bu nedenle

$$(2a-b)^6 = 1(2a)^6(-b)^0 + 6(2a)^5(-b)^1 + 15(2a)^4(-b)^2 + 20(2a)^3(-b)^3 + 15(2a)^2(-b)^4$$
$$+6(2a)^1(-b)^5 + 1(2a)^0(-b)^6 \text{ olur.}$$

O hâlde baştan 3. terim $15(2a)^4(-b)^2 = 240a^4b^2$ olur.

Bu durumda baştan 3. terimin katsayısı 240 bulunur.

ç) Sondan 2. terim için kuvvetin 1 fazlasından 2 çıkarılarak $r = 5$ bulunur.

Bu durumda sondan 2. terim $\binom{6}{5}(2a)^1 \cdot (-b)^5 = 6 \cdot 2 \cdot a \cdot (-b)^5 = -12ab^5$ ve katsayısı –12 olur.

ÖRNEK

$\left(a^2+\frac{1}{a^3}\right)^3$ ifadesinin açılımını Binom açılımı yardımı ile bulalım.

ÇÖZÜM

$$\left(a^2+\frac{1}{a^3}\right)^3 = 1\cdot(a^2)^3\cdot\left(\frac{1}{a^3}\right)^0 + 3\cdot(a^2)^2\cdot\left(\frac{1}{a^3}\right)^1 + 3\cdot(a^2)^1\cdot\left(\frac{1}{a^3}\right)^2 + 1\cdot(a^2)^0\cdot\left(\frac{1}{a^3}\right)^3$$

$$= a^6 + 3\cdot a^4\cdot\frac{1}{a^3} + 3\cdot a^2\cdot\frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^9}$$

$$= a^6 + 3a + \frac{3}{a^4} + \frac{1}{a^9} \text{ bulunur.}$$

Alıştırmalar 1-5

1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{20}$ açılımına göre aşağıda verilen ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

( ) Baştan 4. terim $\binom{20}{4}\cdot x^{16}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^4$ ile hesaplanır.

( ) Ortadaki terim $\binom{20}{10}\cdot x^{10}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{10}$ ile hesaplanır.

( ) Baştan 8. terim aynı zamanda sondan 12. terimdir.

( ) Baştan 7. terim $\binom{20}{6}\cdot x^{6}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{14}$ ile hesaplanır.

( ) Sondan 6. terim $\binom{20}{15}\cdot x^{5}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{15}$ ile hesaplanır.

( ) Sondan 3. terim baştan 19. terimdir.

2) $\left(3x-\frac{1}{x}\right)^6$ ifadesinde baştan 5. terim aşağıdakilerden hangisidir?

A) $900x^4$ B) $270x^2$ C) $135x^2$ D) $135x^{-2}$ E) $270x^{-2}$

3) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$ açılımına göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Ortadaki terimin katsayısı kaçtır?

b) x^{-2} li terimin katsayısı kaçtır?

4) $\left(a-\frac{2}{a^2}\right)^6$ açılımındaki sabit terim kaçtır?

A) –45 B) –30 C) 15 D) 30 E) 60

5) $\left(b^2+\frac{1}{b}\right)^7$ açılımında katsayılar toplamı kaçtır?

A) 128 B) 120 C) 64 D) 32 E) 16

6) $\left(2a^2+\frac{1}{b}\right)^6$ açılımındaki bir terim $k \cdot a^2 \cdot b^m$ ise $k+m$ kaçtır?

A) 4 B) 7 C) 14 D) 24 E) 56

7) $\left(x+\frac{1}{2y^2}\right)^n = x^n + ... + A \cdot x^7 \cdot y^{-6} + ...$ ise A kaçtır?

A) 12 B) 15 C) 20 D) 45 E) 72

8) $C(10,7)+C(10,8)+C(11,9)+C(12,10)$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $C(13,10)$ B) $C(13,2)$ C) 68 D) 12 E) 6

9) $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{10}$ ifadesi veriliyor. Buna göre boş bırakılan yerleri a seçeneğindeki gibi doldurunuz.

a) Baştan 7. terim $\binom{10}{6} \cdot (x)^4 \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)^6$ olur.

b) Ortadaki terim ....

c) Baştan 4. terim ....

ç) Sondan 3. terim ....

d) Baştan 2. terim, sondan .... terimdir.

e) Sondan 6. terim, baştan .... terimdir.

1.2. Basit Olayların Olasılıkları

Meteoroloji uzmanları, gelişen teknoloji ile günlük hava durumunu % 98 olasılıkla doğru tahmin etmektedirler.

Tıpta olasılıkla ilgili olan karar verme ağaçları ile teşhis yapma yöntemleri geliştirilmiştir.

Astronomi ve kriminolojide (suç bilimi), olasılık kavramları önemli rol oynar.

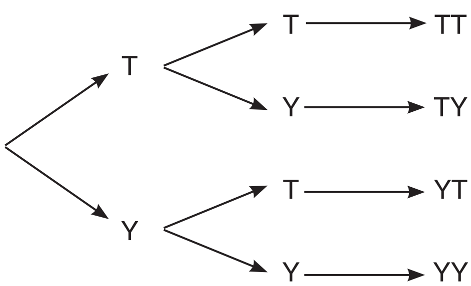
Olasılık günlük hayatımızda da karar verme sürecinde etkindir.

Olasılığa günlük hayattan ne tür örnekler verebilirsiniz?

ÖRNEK

2 madeni paranın düzgün bir zemine atılması deneyinde örnek uzayı bulalım.

ÇÖZÜM



	Y	T
Y	YY	YT
T	TY	TT

Örnek uzay, E = {TT, TY, YT, YY} şeklinde bulunur.

Bilgi

Yeni bilgi kazanmak, olayların gelişimini incelemek için yapılan çalışmalara **deney** denir.

Deneyin mümkün olan her sonucuna da o deneye ait **çıktı (sonuç)** adı verilir. Örneğin madenî paranın havaya atılması deney, yazı veya tura gelmesi çıktılardır.

Bir deneyde elde edilen çıktıların kümesine o deneyin **örnek uzayı** denir ve **E** ile gösterilir. Örneğin madenî paranın düzgün bir zemine atılması deneyinde elde edilen çıktıların kümesi E = {T, Y} örnek uzaydır.

Etkinlik

✷ Bir madenî paranın atılması deneyinde örnek uzay kaç elemanlıdır?

✷ Üç madenî paranın birlikte atılması deneyinde örnek uzay kaç elemanlıdır?

✷ Bir zar atılması deneyinde örnek uzay kaç elemanlıdır?

✷ İki zarın birlikte atılması deneyinde örnek uzay kaç elemanlıdır?

✷ Bir zarın 2 kez atılması ile iki zarın birlikte atılması deneyinde örnek uzayların eleman sayısı aynı mıdır?

Bilgi

Aynı örnek uzayda herhangi bir olaya ait olası durumların sayısı başka bir olaya ait olası durumların sayısına eşit ise bu olaylara **eş olasılı olaylar**, eşit değil ise **eş olası olmayan olaylar** denir.

ÖRNEK

Bir zar atma deneyinde eş olası durumda olan ve eş olası durumda olmayan olayları bulalım.

ÇÖZÜM

Bir zar atma deneyinde örnek uzay E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dir.

Tek sayı gelme olayı A = {1, 3, 5} ve çift sayı gelme olayı B = {2. 4. 6} olmak üzere her iki kümenin de eleman sayıları eşittir. Bir zar atma deneyinde tek sayı gelme olayı ile çift sayı gelme olayının eş olası durumda olduğu bulunur.

Üst yüze gelen sayının 4 e bölünmesi olayı C = {4} ve 4 e bölünmemesi olayı D = {1, 2, 3, 5, 6} olmak üzere bu kümelerin eleman sayıları eşit değildir. 4 e bölünüp bölünmediğinin belirlendiği bir zar atma deneyinde eş olası olmayan durum bulunur.

Dikkat

Bir zarın n kez atılması veya n tane zarın birlikte atılması deneyinde örnek uzay aynıdır ve 6^n elemanlıdır.

Madenî bir paranın n kez atılması ile n tane madenî paranın birlikte atılması deneyinde örnek uzay aynıdır ve 2^n elemanlıdır.

Bilgi

Bir örnek uzayın her alt kümesine **olay** denir. Boş kümeye **imkânsız olay**, E örnek uzayına da **kesin olay** denir.

ÖRNEK

Bir torbada bulunan özdeş 4 mavi, 2 kırmızı ve 3 yeşil bilye arasından 3 tane rastgele bilye seçilmesi deneyinde örnek uzayın eleman sayısını bulalım.

ÇÖZÜM

9 bilyeden rastgele 3 farklı bilye $\binom{9}{3}$ farklı şekilde seçilebilir.

$s(E) = \binom{9}{3} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ olur.

ÖRNEK

Aynı torbada bulunan özdeş 5 yeşil ve 3 mavi bilye arasından rastgele 3 bilye seçiliyor. İkisinin yeşil, birinin mavi gelme olayının eleman sayısını hesaplayalım.

ÇÖZÜM

İstenen olaya yani ikisinin yeşil, birinin mavi gelme olayına A dersek 5 yeşilden 2 tane, 3 maviden 1 tane seçilmesi, $s(A) = \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} = 30$ olur.

Bilgi

Aynı örnek uzaydaki iki olay A ve B olsun. $A \cap B = \varnothing$ ise A ile B **ayrık olaylar**dır.
$A \cap B \neq \varnothing$ ise A ile B **ayrık olmayan olaylar**dır.

ÖRNEK

Bir çift zarın atılması deneyinde örnek uzayı tablo ile göstererek üst yüze gelen sayıların toplamlarının 5 olma olayını, üst yüze gelen sayıların çarpımlarının tek sayı olma olayını ve üst yüze aynı sayıların gelme olayını karşılaştıralım.

1

ÇÖZÜM

	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

1. olaya A olayı, 2. olaya B olayı ve 3. olaya da C olayı dersek;

$A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

$B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$

$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ olur.

A ile B aynı örnek uzayda fakat ortak elemanı olmayan iki olaydır. $A \cap B = \varnothing$ olduğundan A ile B ayrık olaylardır.

A ile C aynı örnek uzayda yine ortak elemanı olmayan iki olaydır. $A \cap C = \varnothing$ olduğundan A ile C ayrık olaylardır.

B ile C aynı örnek uzayda ve ortak elemanı olan iki olaydır. $B \cap C = \{(1,1),(3,3),(5,5)\}$ olduğundan $B \cap C \neq \varnothing$ olur. Bu durumda B ile C ayrık olmayan olaylardır.

Bilgi

A, E örnek uzayında tanımlanmış bir olay olsun. A olayının çıktılarının dışında örnek uzayın bütün çıktılarını içeren olaya **A olayının tümleyeni** denir ve **A**$'$ ile gösterilir.

ÖRNEK

Bir zarın atılması deneyinde üst yüze 2 den büyük sayı gelme ve gelmeme olaylarını inceleyelim.

ÇÖZÜM

Örnek uzayı E, zarın 2 den büyük gelme olayını A ve zarın 2 den büyük gelmeme olayını A' ile gösterelim. Bu durumda;

$E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{3,4,5,6\}$ ve $A' = \{1,2\}$ olur.

$A \cup A' = E$ ve $A \cap A' = \varnothing$ olduğunu görürüz.

Okuma Metni

PİERRE SİMON LAPLACE (1749-1827)


Pierre Laplace

Pierre Simon Laplace (Piyer Simon Laplas) Fransız ünlü matematikçi ve astronomdur. Fakir bir aileden gelen Laplace'ın güçlü bir kariyeri olmuştur. 16 yaşında gittiği Caen Üniversitesinde matematik dehasını kanıtlayarak, ünlü matematikçi d'Alembert'in (Delombe) aracılığıyla Ecole Militaireye (Ekol Milite) profesörlüğe atandı. Matematik alanındaki çalışmaları konusunda en önemli olarak bilinen "Laplace İşleci" (Operatör Laplacien) teoremini buldu.

Laplace matematik ile ilgilenen ve matematik çalışan gençlere sürekli destek olur ve onlara yardım ederdi. Olasılıklar kuramı üzerinde çalışması, onu astronomide kullanmasından kaynaklandı. Olasılıklar kuramını yalnızca kimi olayların olasılıklarının hesaplanması problemine değil, olguların nedenlerinin belirlenmesine, yaşam istatistiklerine ve gelecekteki olaylara uygulayan Laplace, bu kuramın fizik ve astronomideki önemi üzerinde özellikle durmuştur. "Bildiklerimiz az, bilmediklerimiz sonsuzdur." sözü Laplace'a aittir.

(Kaynak: www.http://guncelmatematik.com/pierre-simon-laplace.html)

EL KİNDÎ (801-873)


Temsili resim

İslam dünyasında tıp, astronomi, matematik, etimoloji ve müzik alanlarında toplam 290 kitap yayımlamıştır. Matematikte, sayı sistemleri üzerine kitaplar yazmış ve modern aritmetiğin büyük bir bölümünün kuruluşunu hazırlamıştır. El Kindî'nin şifre çözme üzerine 850 yılında yazdığı "Şifrelenmiş Mesajların Şifresini Çözme Üzerine Bir El Yazısı" adlı eseri, 1987 yılında İstanbul Osmalı Arşivi'nde keşfedilmiştir. El Kindî sekizi sayılar teorisi, ikisi oran ve zaman ölçümü, birisi de izafi büyüklükler hakkında olmak üzere 11 kitabında modern aritmetiğin temellerini atmıştır.

Yazdığı eserleri Rönesans'a ışık tutan El-Kindî aynı zamanda Orta Çağ'ın en büyük 10 akıl bilimcisinden biri olarak anılmaktadır.

(Kaynak: www.isam.org.tr/documents/_dosyalar/_pdfler/islam_arastirmalari.../027_054.pdf)

Bilgi

Bir olayın olmasının veya olmamasının matematiksel değeri veya olabilirlik yüzdesi değerine **olasılık** denir.

Bir olayın olma olasılığı $= \dfrac{\text{İstenen olayın çıktı sayısı}}{\text{Tüm çıktıların sayısı}}$ diyebiliriz.

Her bir çıktısının gelme şansı eşit olan örnek uzaya E ve istediğimiz olaya da $A(A \subseteq E)$ dersek A olayının gerçekleşme olasılığı "$P(A)$" olmak üzere;

$P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)}$ olur.

1

A ve B, E örnek uzayında iki olay olsun. $(A \subseteq E, B \subseteq E)$

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

$P(A) = 0$ ise A imkânsız olay, $(A = \emptyset)$

$P(A) = 1$ ise A kesin olaydır. $(A = E)$

2) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

3) $P(A) + P(A') = 1$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5) $A \cap B = \emptyset$ ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ÖRNEK

Bir madeni parayı iki kez havaya attığımızda üst yüze gelenlerin tura olma olasılığını bulalım.

ÇÖZÜM

Üst yüze iki kez tura gelme olayı, $A = \{(T, T)\}$ olur. $s(A) = 1$ bulunur.

Örnek uzay, $E = \{(Y, T), (T, Y), (T, T), (Y, Y)\}$ olur. $s(E) = 4$ bulunur.

A olayının olma olasılığı $P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{1}{4}$ bulunur.

ÖRNEK

Bir kutuda yeşil, mavi, kırmızı, beyaz ve sarı olmak üzere özdeş 5 mum vardır. Rastgele bir mum seçildiğinde her bir renk mum için eş olası veya eş olası olmayan olayları inceleyelim.

ÇÖZÜM

Toplam 5 eleman ve her bir renkten bir tane olduğundan

$P(Y) = P(M) = P(K) = P(B) = P(S) = \dfrac{1}{5}$ diyebiliriz. Tüm olası durumların sayısı eşit olduğundan bu olaylar eş olası olan olaylardır.

ÖRNEK

$A, B \subset E$, $P(A \cup B) = \dfrac{1}{3}$, $P(A) = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{1}{6}$ ise $P(A \cap B)$ ve $P(B')$ bulalım.

ÇÖZÜM

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - P(A \cap B)$ Buradan $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ olur.

$P(B) + P(B') = 1$ olduğundan $\frac{1}{6} + P(B') = 1$ ve $P(B') = \frac{5}{6}$ olur.

ÖRNEK

Bir torbada özdeş 4 mavi, 2 kırmızı ve 1 yeşil bilye vardır. Rastgele bir bilye çektiğimizde her bir renk için eş olası veya eş olası olmayan olayları inceleyelim.

ÇÖZÜM

Toplam 7 bilye vardır.

4 tane mavi bilye olduğu için mavi gelme olasılığı $P(M) = \frac{4}{7}$,

2 tane kırmızı bilye olduğu için kırmızı gelme olasılığı $P(K) = \frac{2}{7}$,

1 tane yeşil bilye olduğu için yeşil gelme olasılığı $P(Y) = \frac{1}{7}$ olur.

Tüm olası durumların sayısı eşit olmadığından dolayı bu olaylar eş olası olmayan olaylardır.

ÖRNEK

Örnek uzayı 5 elemanlı ve eş olası olan olayların durumlarını inceleyelim.

ÇÖZÜM

$E = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ eş olası olan olaylardan oluşan örnek uzay olsun.

Bu durumda $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5)$ olur.

Her birine x dersek ve toplarsak örnek uzayın olasılığına eşit olur. $s(E) = 1$ olduğundan

$x + x + x + x + x = 1 \Rightarrow 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$ olur.

A_1, A_2, A_3, A_4 ve A_5 olaylarının olasılıkları eşit ve her birinin sonucu $\frac{1}{5}$ tir.

ÖRNEK

Düzgün iki zar havaya atılıyor. Üst yüze gelen sayıların toplamının 7 olması olasılığını hesaplayalım.

ÇÖZÜM

İki zar atıldığı için $s(E) = 6 \cdot 6 = 36$ dır. Üst yüze gelen sayıların toplamının 7 olma olayı A ise

$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ dir. $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ olur.

ÖRNEK

Bir madenî paranın arka arkaya 3 kez atılması deneyinde sonucun en az 2 kez tura gelmesi olasılığını bulalım.

ÇÖZÜM

$E = \{YYY, YYT, YTY, TYY, TTY, TYT, YTT, TTT\}$, $A = \{TTY, TYT, YTT, TTT\}$

$P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ olur.

ÖRNEK

Düzgün iki zar atıldığında üst yüze gelen sayıların toplamının 6 veya çarpımlarının tek sayı olması olasılığını hesaplayalım.

ÇÖZÜM

$s(E) = 6 \cdot 6 = 36$ dır.

Üst yüze gelen sayıların toplamlarının 6 olma olayı A ve üst yüze gelen sayıların çarpımlarının tek sayı olma olayı T olsun.

$A = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

$T = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3)(3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$

$A \cap T = \{(1,5), (3,3), (5,1)\}$ $[A \cap T \neq \varnothing$ olduğundan A ile B ayrık olaylar değildir.$]$

$P(A \cup T) = P(A) + P(T) - P(A \cap T) = \dfrac{5}{36} + \dfrac{9}{36} - \dfrac{3}{36} = \dfrac{11}{36}$ bulunur.

ÖRNEK

Özdeş 6 kırmızı ve 3 mavi top bulunan bir torbadan rastgele seçilen 2 topun;

a) İkisinin de kırmızı gelme olasılığını, **b)** 1 kırmızı ve 1 mavi gelme olasılığını bulalım.

ÇÖZÜM

$\dbinom{9}{2}$, 9 toptan 2 topun seçilmesi durumudur.

a) 6 kırmızı toptan 2 tanesini $\dbinom{6}{2}$ farklı şekilde seçeriz. İstenen olasılık $\dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{9}{2}} = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$ dir.

b) 6 kırmızı toptan 1 tane, 3 mavi toptan 1 tane seçersek $\dbinom{6}{1} \cdot \dbinom{3}{1}$ farklı durum oluşur.

İstenen olasılık $\dfrac{\binom{6}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{9}{2}} = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$ dir.

ÖRNEK

Özdeş 5 kırmızı, 2 mavi ve 3 yeşil boncuk bulunan bir torbadan rastgele 1 boncuk seçiliyor. Çekilen boncuğun mavi **veya** yeşil olması olasılığını hesaplayalım.

ÇÖZÜM

Mavilerin kümesi $M = \{M_1, M_2\}$ olsun.

Yeşillerin kümesi $Y = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ olsun.

$P(M \cup Y) = P(M) + P(Y) - P(M \cap Y) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} - 0 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ olur.

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin elemanları ile yazılan rakamları farklı, 3 basamaklı sayılardan rastgele bir tane seçiliyor. Bu sayının çift olması olasılığını hesaplayalım.

ÇÖZÜM

Örnek uzayın eleman sayısı

Yüzler	Onlar	Birler
5	4	3

şeklinde, saymanın temel ilkesine göre $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ olarak bulunur.

İstediğimiz olay aynı kümenin elemanları ile yazılabilecek 3 basamaklı rakamları farklı çift sayılar olduğundan, bu olayın eleman sayısı

Yüzler	Onlar	Birler
4	3	2

$\{2, 4\}$

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ tanedir.

Bu olaya Ç dersek $P(Ç) = \frac{s(Ç)}{s(E)} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$ olur.

ÖRNEK

25 ile 45 arasındaki tam sayılardan rastgele bir tam sayı seçiliyor. Bu sayının 9 un katı olması olasılığını bulalım.

ÇÖZÜM

Örnek uzay $E = \{26, 27, ..., 44\} \Rightarrow s(E) = 19$

Sayının 9 un katı olma olayı A olsun. $A = \{27, 36\}$ olur. O hâlde $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{2}{19}$ olur.

Etkinlik

35 kişilik bir sınıfta, rehberlik dersinde sınıf öğretmeni sınıf başkanının Görkem olduğunu duyuruyor.

Bunun üzerine başkan olmak isteyen Ahmet 'in yakın arkadaşları ile Görkem'in yakın arkadaşları arasında tartışma başlıyor. Öğretmen sınıftaki öğrencilere tartışmamaları gerektiğini söylüyor. Çözüm olarak sınıf başkanlığı için bir seçim yapılmasına karar veriyor.

Sınıftaki tüm öğrencilerin oy kullandığı bu seçimde Ahmet ve 12 yakın arkadaşının Ahmet'e, Görkem ve 13 yakın arkadaşının da Görkem'e oy vereceğini düşünelim.

✷ Görkem'in bu seçim sonunda sınıf başkanı olma olasılığı en az kaçtır?

✷ Oyları belirsiz olanlardan 5 öğrencinin boş oy kullanacağını düşünürseniz, Ahmet'in sınıf başkanı olma olasılığı var mıdır?

Alıştırmalar 1-6

1) İki basamaklı sayılardan rastgele 1 tane seçiliyor. Bu sayının birler basamağının 0 rakamı olma olasılığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{15}$ E) $\frac{1}{18}$

2) İçinde 4 kırmızı, 2 mavi ve 2 yeşil özdeş bilye bulunan torbadan rastgele 2 bilye seçiliyor. 1 mavi, 1 yeşil gelme olasılığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{7}$

3) İçinde 3 beyaz, 4 siyah özdeş top bulunan bir torbadan arka arkaya 3 top çekiliyor.İlk ikisinin siyah, diğerinin beyaz olma olasılığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{6}{35}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{8}{35}$

4) İçinde 5 mavi, 4 beyaz özdeş bilye bulunan torbadan seçilen her bilye yerine koyularak arka arkaya 2 bilye seçiliyor. İkisinin de beyaz gelme olasılığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{20}{81}$ B) $\frac{25}{90}$ C) $\frac{25}{81}$ D) $\frac{16}{81}$ E) $\frac{5}{18}$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

1) $P(n,1)+P(n,0)=6$ ise n aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2) $\{a,b,c,d,e,f\}$ üçlü permütasyonlarının kaç tanesinde a **bulunur**, b **bulunmaz**?

A) 18 B) 24 C) 28 D) 32 E) 36

3) $\{0,2,4,5,7,8\}$ sayıları ile 3 basamaklı kaç tek sayı yazılır?

A) 27 B) 36 C) 45 D) 48 E) 60

4) 3 öğrenci önde, 2 öğretmen arkada olmak üzere fotoğraf çektireceklerdir. Buna göre öğrenci ve öğretmenler kaç farklı şekilde sıralanabilirler?

A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

5) $\{1,3,5,7,8\}$ kümesinin elemanları ile 3 basamaklı sayılar yazılacaktır. Bu sayılar küçükten büyüğe sıralanırsa 753 sayısı kaçıncı sırada yer alır?

A) 81 B) 82 C) 83 D) 85 E) 87

6) "ŞAMBABA" sözcüğündeki harflerin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız 7 harfli kaç farklı harf dizilimi yazılabilir?

A) 210 B) 350 C) 420 D) 630 E) 840

7) 310213 sayısının rakamları kullanılarak 6 basamaklı kaç **farklı** sayı yazılabilir?

A) 90 B) 120 C) 150 D) 180 E) 210

8) "ÇATLAMA" sözcüğündeki harfler kullanılarak yazılabilen anlamlı ya da anlamsız 7 harfli harf dizilimlerinin kaçında herhangi iki A harfi yan yana **gelmez**?

A) 120 B) 150 C) 180 D) 210 E) 240

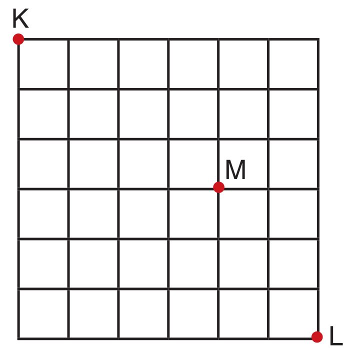
9) 550888 sayısının rakamlarını kullanarak 6 basamaklı kaç **değişik** çift sayı yazılabilir?

A) 24 B) 28 C) 32 D) 34 E) 36

10) 3224424 sayısının rakamları kullanılarak 7 basamaklı, 3 ile başlayıp 4 ile bitmeyen kaç tane sayı yazılabilir?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 20

11) Yandaki şekildeki gibi hazırlanmış bir labirent vardır. M noktasına uğramak koşulu ile K noktasından L noktasına **en kısa** yoldan kaç **farklı** şekilde gidilebilir?



A) 400 B) 350 C) 320 D) 280 E) 240

12) 4 farklı kalem ve 3 farklı silgi arasından 3 tane seçim yapılacaktır. İçlerinden en az biri kalem olacak şekilde kaç **farklı** durum gerçekleşir?

A) 35 B) 34 C) 30 D) 27 E) 18

13) $C(n, 2) = 45$ ise n aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

14) $\binom{11}{3} + \binom{11}{4} + \binom{12}{5} + \binom{13}{6} = \binom{n}{r}$ ise $n + r$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 20 B) 19 C) 18 D) 17 E) 16

15) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 2 adet tek sayı bulunur?

A) 12 B) 14 C) 18 D) 20 E) 24

16) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2\right)^{12}$ ifadesinde ortadaki terim aşağıdakilerden hangisidir?

A) $210x^{15}$ B) $210x^{9}$ C) $924x^{9}$ D) $70x^{15}$ E) $70x^{12}$

17) $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^8$ x in azalan kuvvetlerine göre açıldığında $\frac{k}{x}$ baştan a. terim ise k + a aşağıdakilerden hangisidir?

A) 61 B) 62 C) 45 D) 30 E) 25

18) İçinde 4 sağlam ve 5 arızalı ürün bulunan bir kutudan 3 ürün alınmıştır. Bunlardan sadece ikisinin sağlam çıkma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{14}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{5}{14}$ E) $\frac{5}{7}$

19) 4 evli çiftin bulunduğu 10 kişilik bir gruptan 3 kişi seçilecektir. Bu 3 kişi arasında sadece 1 evli çiftin olması olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{15}$ B) $\frac{1}{13}$ C) $\frac{4}{15}$ D) $\frac{7}{15}$ E) $\frac{7}{30}$

20) Birbirinden farklı 3 kitap ve 2 defter bir rafta sıralanıyor. Defterlerin yan yana olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{15}$ B) $\frac{3}{20}$ C) $\frac{2}{15}$ D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{2}{5}$

21) İçinde 4 mavi, 5 yeşil ve 3 kırmızı özdeş top bulunan bir torbadan yerine konulmaksızın art arda 3 top çekiliyor. Topların ilk ikisinin yeşil, diğerinin kırmızı gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{22}$ E) $\frac{3}{55}$

22) 6 madenî para atılıyor. 5 tanesinin yazı gelme olasılığı kaçtır?

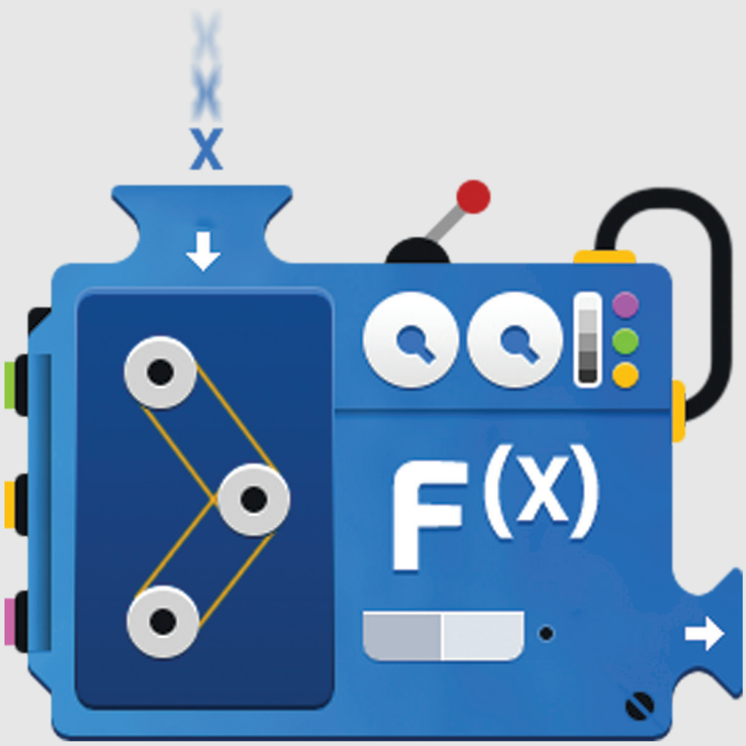
A) $\frac{1}{64}$ B) $\frac{3}{32}$ C) $\frac{7}{64}$ D) $\frac{9}{64}$ E) $\frac{1}{16}$

23) 5 mavi ve 4 siyah özdeş bilye arasından rastgele 3 bilye seçiliyor. Üçünün de aynı renkten gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{5}{84}$ C) $\frac{1}{21}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{3}{14}$

2

FONKSİYONLAR

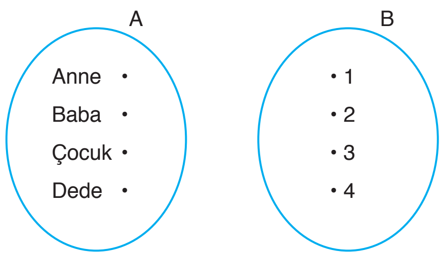


2. FONKSİYONLAR

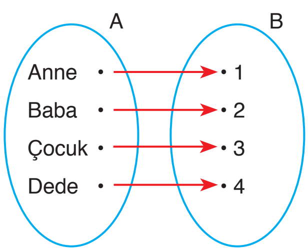
2.1. Fonksiyon Kavramı ve Gösterimi

Fonksiyon kavramını aşağıdaki örnekle açıklayalım. Komşuluk ilişkilerinin iyi olduğu 5 daireli bir apartmanın 5 numaralı dairesinde anne, baba, çocuk ve dede yaşamakta olsun. Tadilat işlemleri ve boya yapılacağından dolayı hiç kimsenin evde olmaması gerektiğini ve aile bireylerinin apartmandaki komşulara gideceğini düşünelim. Evdeki aile bireylerinin her birini bir kümenin elemanı olarak kabul edelim ve bu kümeye “A” diyelim. Apartmandaki diğer dairelerin kapı numaralarını da “B” kümesinin elemanları olarak düşünelim.

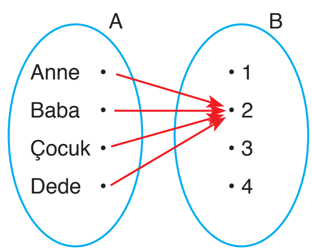
Yukarıdaki gerekliliğe göre A kümesindeki elemanlar ile B kümesindeki elemanlar arasında en az kaç eşleşme olmalıdır?



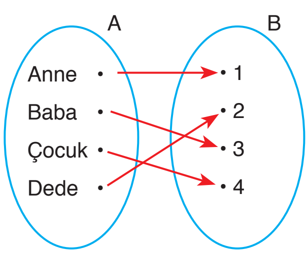
A kümesindeki elemanları hiçbiri açıkta kalmayacak şekilde ok işareti ile B kümesinin elemanları ile eşleyelim.



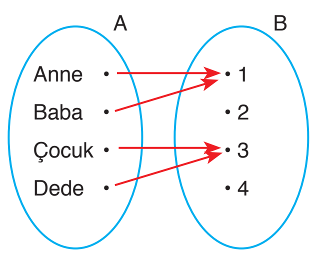
1. Şekil



2. Şekil

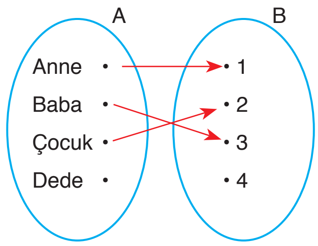


3. Şekil

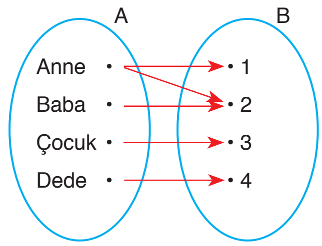


4. Şekil

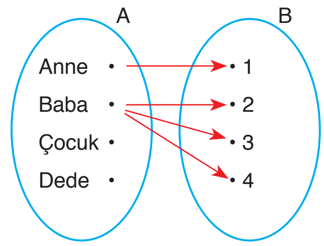
Yukarıdaki eşleşmelerin her biri istediğimiz koşula uygundur. Çünkü A kümesinde açıkta eleman kalmamıştır ve her bir elemanı B kümesindeki elemanlardan biri ile eşleşmiştir. 2. şekilde bütün bireyler 2 nolu daireye gitmiş, 4. şekilde anne ve baba 1 nolu, çocuk ve dede 3 nolu daireye gitmiştir. Bu eşleşmelerde mantığa aykırı hiçbir durum yoktur.



1. Şekil



2. Şekil



3. Şekil

Şimdi de yukarıdaki eşleşmeleri incelersek, 1. şekilde A kümesinde açıkta eleman kalmış, 2. şekilde A kümesindeki bir eleman B kümesindeki iki ayrı eleman ile eşleşmiştir. Buna şu yorumu yapabiliriz: Bir kişi aynı anda iki farklı yerde olamayacağı için durum, mantığa aykırıdır. 3. şekilde ise hem A kümesinde açıkta eleman kalmış hem de bir eleman B kümesindeki birden çok elemanla eşleşmiştir.

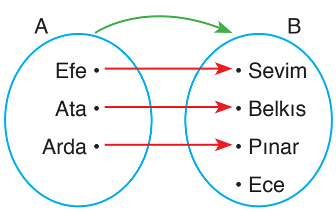
Bilgi

"Boş kümeden farklı bir A kümesindeki elemanların yine boş kümeden farklı bir B kümesindeki elemanlarla eşleştirildiği bir gösterimde A kümesinde açıkta eleman kalmıyorsa ve A kümesindeki her bir eleman B kümesinde bir ve yalnız bir elemanla eşleşiyorsa bu ilişki A dan B ye fonksiyon belirtir" diyebiliriz.

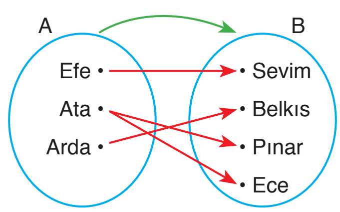
Bu iki durumu "fonksiyon" kavramı ile bağdaştırabiliriz. İlk durumdaki 4 şekilde verilen eşleştirmeler-fonksiyon kavramına örnektir. İkinci durumdaki 3 şekilde verilen eşleştirmelerin hiçbiri fonksiyon değildir.

ÖRNEK

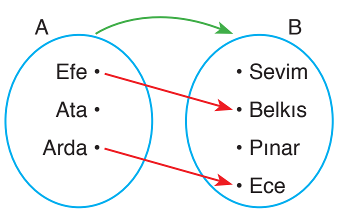
A kümesi çocuklardan, B kümesi de annelerden oluştuğuna göre, aşağıda verilen eşleştirmelerin fonksiyon olup olmadığını araştıralım.



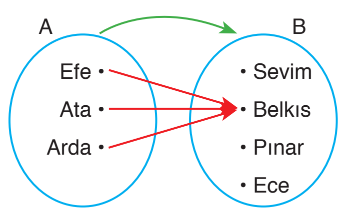
1. Şekil



2. Şekil



3. Şekil



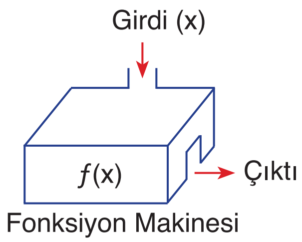
4. Şekil

ÇÖZÜM

Her çocuğun annesi olacağı ve bunun bir tek olacağı aşikârdır. 1 ve 4. şekildeki eşleştirmeler fonksiyonu ifade eder. 1. şekilde her çocuğun annesi farklı kişiler, 4. şekilde bütün çocukların annesi aynı kişi olarak yorumlanabilir.

2 ve 3. şekildeki eşleştirmeler ise fonksiyon değildir. 2. şekilde bir çocuk iki farklı anne ile eşleştirilmiştir. 3. şekilde ise bir çocuk ve anne eşleştirilmesi yapılmamıştır. Dolayısıyla 1 ve 4. şekillerdeki eşleştirmeler fonksiyon, 2 ve 3. şekillerdeki eşleştirmeler fonksiyon değildir.

ÖRNEK



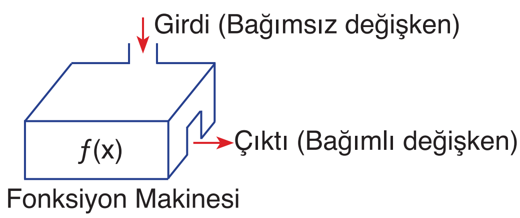
Girdi	Çıktı
–1	0
0	2
1	4
2	6

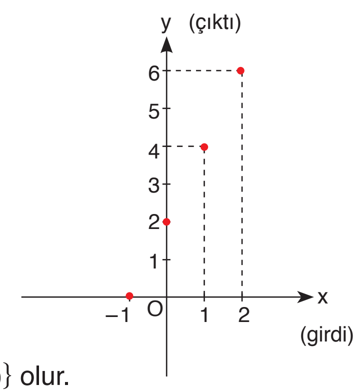
Fonksiyonları basit temsili bir makine ile ifade edebiliriz. Yukarıda fonksiyon makinesi ve tabloda bu makineye giren–çıkan değerler verilmiştir. f fonksiyonunun kuralını yazalım, grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

Makineye giren sayılar, 2 katının 2 fazlası olarak çıkmıştır. Yani $f(x) = 2x + 2$ dir.

Fonksiyon makinesinde girdiler (x) bağımsız değişken, çıktılar $(f(x))$ bağımlı değişkendir.





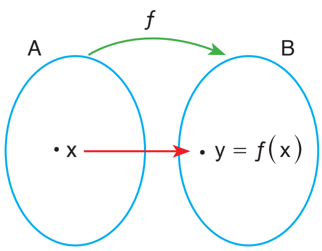
$$\left.\begin{aligned} f(-1) &= 2 \cdot (-1) + 2 = -2 + 2 = 0 \\ f(0) &= 2 \cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2 \\ f(1) &= 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4 \\ f(2) &= 2 \cdot 2 + 2 = 4 + 2 = 6 \end{aligned}\right\} \; f = \{(-1, 0), (0, 2), (1, 4), (2, 6)\} \text{ olur.}$$

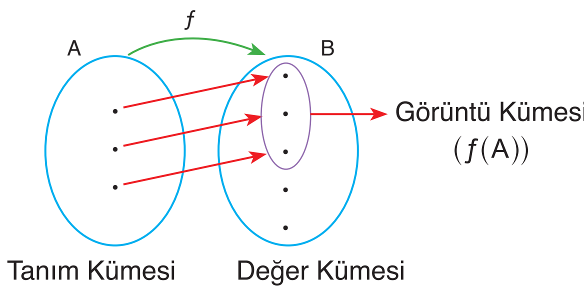
Bilgi

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere, A nın her elemanını B nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye A dan B ye bir fonksiyon denir. Fonksiyonlar genellikle f, g, h gibi semboller ile gösterilir.

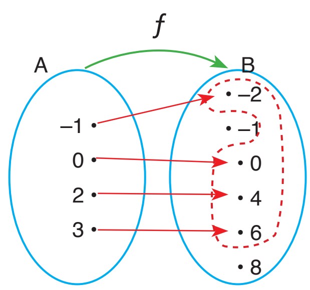
Bir A kümesinden B kümesine tanımlı f fonksiyonu $f: A \longrightarrow B$ ile gösterilir. A ya f fonksiyonunun "tanım kümesi", B ye de f fonksiyonunun "değer kümesi" denir. $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ kümesine ise f fonksiyonunun "görüntü kümesi" denir ve $f(A)$ ile gösterilir. $f(A) \subseteq B$ dir.

$f: A \longrightarrow B,$
$x \longrightarrow y = f(x)$





ÖRNEK



Yukarıdaki f fonksiyonunun tanım, değer ve görüntü kümelerinin elemanlarını liste yöntemiyle yazalım.

ÇÖZÜM

A = Tanım Kümesi = {– 1, 0, 2, 3},   B = Değer Kümesi = {– 2,–1, 0, 4, 6, 8}

f(A) = Görüntü Kümesi = {– 2, 0, 4, 6}, $f(A) \subset B$ dir.

f = {(– 1,–2), (0, 0), (2, 4), (3, 6)} olur. Benzer şekilde

f (–1) = –2, f(0) = 0, f(2) = 4, f(3) = 6 diyebiliriz.

Bilgi

$(x, y) \in f$ ve y = f(x) ise $(x, f(x)) \in f$ olur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}-\{2\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x+5}{x-2}$ olduğuna göre $f(4)$ değerini hesaplayalım.

ÇÖZÜM

$f(4)$ ü bulmak için fonksiyonda x yerine 4 yazmalıyız.

$$f(x)=\frac{2x+5}{x-2}$$

$$f(4)=\frac{2\cdot 4+5}{4-2}$$

$f(4)=\dfrac{13}{2}$ olur.

ÖRNEK

$f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad f(x) = 2x + 3$ ise $f(x–1)$ in kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

$f(x-1)$ in kuralını bulmak için fonksiyonda x yerine $x-1$ yazmalıyız.

$f(x) = 2x + 3$

$f(x–1) = 2 \cdot (x–1) + 3$

$f(x–1) = 2x–2 + 3$

$f(x–1) = 2x + 1$ olur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x)=|x-3|-|x|$ ise $f(-1)+f(5)$ işleminin sonucunu bulalım.

ÇÖZÜM

$f(-1)=|-1-3|-|-1|=|-4|-|-1|=4-1=3$

$f(5)=|5-3|-|5|=|2|-|5|=2-5=-3$

$f(-1)+f(5)=3+(-3)=0$ olur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(3x-3) = 5x+7$ olduğuna göre $f(0)$ ın değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$f(\underbrace{3x-3}_{0}) = 5x+7$

$3x-3 = 0$

$3x = 3$

$x = 1$ dir.

$f(3 \cdot 1 - 3) = 5 \cdot 1 + 7 \Rightarrow f(0) = 12$ olur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$ olduğuna göre $f(1)$ in değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$a = 1$ için $f(1 \cdot b) = f(1) + f(b) \Rightarrow f(b) = f(1) + f(b) \Rightarrow f(1) = 0$ olur.

Fonksiyon Çeşitleri

Birim Fonksiyon ve Sabit Fonksiyon

Bilgi

$A \neq \varnothing$ olmak üzere, $f:A \longrightarrow A$ fonksiyonunda her $x \in A$ icin $f(x) = x$ ise

f fonksiyonuna **birim fonksiyon** denir ve I ile gösterilir.

$A \neq \varnothing$ ve $B \neq \varnothing$ olmak üzere $f:A \longrightarrow B$ ve $k \in B$ olsun. Her $x \in A$ için $f(x) = k$ ise

f fonksiyonuna **sabit fonksiyon** denir.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a-3) \cdot x + b + 2$ fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre $a + b$ işleminin sonucunu bulalım.

ÇÖZÜM

$f(x) = \underbrace{(a-3)}_{1} \cdot x + \underbrace{b+2}_{0}$

$a-3 = 1$

$a = 4$

$b + 2 = 0$

$b = -2$

$a + b = 4-2 = 2$ olur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = (3 - a)x$ fonksiyonu birim fonksiyon ise a değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$f(x)$ birim fonksiyon ise x in katsayısı 1 olmalıdır.

$f(x) = (3 - a)x$ birim fonksiyon olduğundan

$3 - a = 1 \Rightarrow a = 2$ bulunur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f = (a + 4) \cdot x + 2a - 3$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre $f(5)$ in değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$f(x) = \underbrace{(a + 4)}_{0} \cdot x + 2a - 3$$

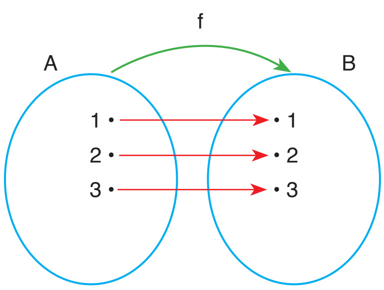
$a + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -4$

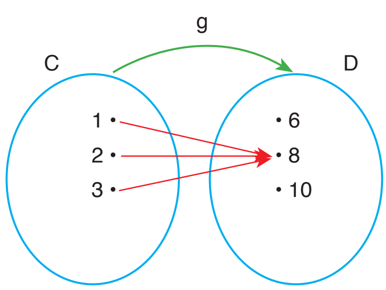
$f(x) = 2 \cdot (-4) - 3 = -11$

$f(5) = -11$ dir.

ÖRNEK

Aşağıda verilen fonksiyonların hangi çeşit fonksiyon olduğunu belirleyelim.





ÇÖZÜM

$f: A \longrightarrow B$ fonksiyonunda $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ olduğundan fonksiyon birim fonksiyondur.

$g: C \longrightarrow D$ fonksiyonunda $f(1) = 8, f(2) = 8, f(3) = 8$ olduğundan fonksiyon sabit fonksiyondur.

Etkinlik

Hüseyin, $f(x) = 2^x + 7$ fonksiyonunda 3 sayısının görüntüsünün 13 olduğunu belirterek tahtaya "$f(3) = 2 \cdot 3 + 7$ ve $f(3) = 13$" yazmıştır. Hüseyin'in hatalı yazdığını farkeden Ünal, öğretmeninden söz alarak $f(3)$ ün 15 olması gerektiğini söylemiştir. Öğretmeni Ünal'ı tahtaya kaldırarak hatanın nerede yapıldığını göstermesini ve sonra da "$f(x) = 5^x + 7$ ve $f(n) = 12$" ise n yi nasıl bulabileceğini sınıftaki diğer öğrencilere çözerek anlatmasını istemiştir.

✷ Ünal'ın n yi kaç olarak bulduğunu belirtiniz.

✷ İlk durumda Hüseyin hangi fonksiyonu kullanarak yanlış hesap yapmıştır bulabilir misiniz?

Doğrusal Fonksiyon

Bilgi

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ olmak üzere f fonksiyonuna **doğrusal fonksiyon** denir.

Doğrusal fonksiyonların grafikleri doğru belirtir.

ÖRNEK

f doğrusal bir fonksiyondur. $f(0) = 5$ ve $f(2) = 9$ olduğuna göre f fonksiyonunun kuralını yazalım.

ÇÖZÜM

f doğrusal fonksiyon olduğundan $f(x) = ax + b$ şeklinde yazılabilir.

$f(0) = 5 \Longrightarrow a \cdot 0 + b = 5 \Longrightarrow b = 5$

$f(2) = 9 \Longrightarrow a \cdot 2 + b = 9 \Longrightarrow 2a + 5 = 9 \Longrightarrow 2a = 4 \Longrightarrow a = 2$ olur.

Bu durumda $f(x) = ax + b = 2x + 5$ olur.

ÖRNEK

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x)$ fonksiyonu doğrusal fonksiyon olmak üzere $g(x) = (m-1)x^2 + mx - n$ ve $g(2) = 10$ olduğuna göre n nin alacağı değeri bulalım.

ÇÖZÜM

$g(x)$ doğrusal fonksiyonu, $g(x) = ax + b$ şeklinde olduğundan x^2 nin katsayısı 0 olmalıdır.

$g(x) = \underbrace{(m-1)}_{=0}x^2 + mx - n$ $\qquad$ $m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$ dir.

O halde $m = 1$ için $g(x) = (1-1)x^2 + 1 \cdot x - n \Rightarrow g(x) = x - n$ olur.

$g(2) = 10$ olduğundan $g(2) = 2 - n = 10 \Rightarrow n = -8$ bulunur.

Eşit Fonksiyon

Bilgi

$A \neq \varnothing$ ve $B \neq \varnothing$ olmak üzere,

$f: A \longrightarrow B$ ve $g: A \longrightarrow B$, her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ ise f ve g fonksiyonlarına **eşit fonksiyonlar** denir.

ÖRNEK

$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$ kümeleri veriliyor.

$f: A \longrightarrow B$, $f(x) = x^2 + 1$, $g: A \longrightarrow B$, $g(x) = 3x - 1$ olduğuna göre $f = g$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM

$f(1) = 1^2 + 1 \longrightarrow f(1) = 2$ $\quad$ $g(1) = 3 \cdot 1 - 1 \longrightarrow g(1) = 2$

$f(2) = 2^2 + 1 \longrightarrow f(2) = 5$ $\quad$ $g(2) = 3 \cdot 2 - 1 \longrightarrow g(2) = 5$

$f = \{(1, 2), (2, 5)\}$ $\quad$ $g = \{(1, 2), (2, 5)\}$

Tanım kümesindeki her elemanın f ve g fonksiyonları altındaki görüntüleri de eşit olduğundan f ve g fonksiyonları eşittir. Yani $f = g$ dir.

Parçalı Fonksiyon

Bilgi

Tanım kümesinin ayrık alt kümelerinde farklı kurallarla belirlenen fonksiyonlara **parçalı fonksiyon** denir.

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & x < m \text{ ise} \\ g(x), & x \geq m \text{ ise} \end{cases}$$

$x = m$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun kritik noktasıdır.

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & x < m \text{ ise} \\ g(x), & m \leq x \leq n \text{ ise} \\ k(x), & x > n \text{ ise} \end{cases}$$

$x = m$ ve $x = n$ noktaları $f(x)$ fonksiyonunun kritik noktalarıdır.

2

ÖRNEK

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x+7, & x < 0 \text{ ise} \\ x-1, & 0 \le x < 5 \text{ ise} \\ 2x-5, & x \ge 5 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu için,

$f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(5)$ ve $f(10)$ değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$-2 < 0$ olduğundan -2 değeri $f(x) = x + 7$ kuralında x yerine yazılmalıdır.

$f(-2) = -2 + 7 = 5$

$0 = 0$ olduğundan 0 değeri $f(x) = x - 1$ kuralında x yerine yazılmalıdır.

$f(0) = 0 - 1 = -1$

$0 \le 2 < 5$ olduğunda 2 değeri $f(x) = x - 1$ kuralında x yerine yazılmalıdır.

$f(2) = 2 - 1 = 1$

$5 = 5$ olduğundan 5 değeri $f(x) = 2x - 5$ kuralında x yerine yazılmalıdır.

$f(5) = 2 \cdot 5 - 5 = 5$

$10 > 5$ olduğundan 10 değeri $f(x) = 2x - 5$ kuralında yerine yazılmalıdır.

$f(10) = 2 \cdot 10 - 5 = 15$ olur.

ÖRNEK

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \ge 0 \text{ ise} \\ 3x-5, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$ fonksiyonu için,

$f(-2) + f(2)$ işleminin sonucunu bulalım.

ÇÖZÜM

$f(-2) = 3 \cdot (-2) - 5 = -6 - 5 = -11$

$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

$f(-2) + f(2) = -11 + 5 = -6$ olur.

Bire Bir Fonksiyon

Bilgi

A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere,

f: A → B, x → y = $f(x)$ fonksiyonunda Her $x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ya da $f(x_1) = f(x_2)$ için $x_1 = x_2$ oluyorsa f fonksiyonuna, **bire bir fonksiyon** denir.

ÖRNEK

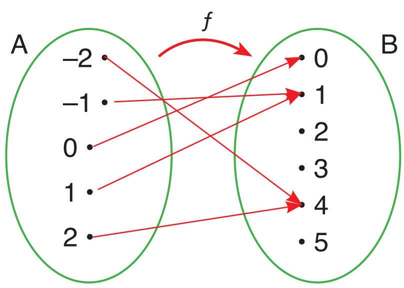
A = {– 2,–1, 0, 1, 2} ve B = {0, 1, 2, 3, 4, 5} olmak üzere

f: A → B, $f(x) = x^2$ ve h: A → B, h(x) = x + 3 fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümelerini inceleyelim.

f ve h fonksiyonlarının bire bir fonksiyon olup olmadığını bulalım.

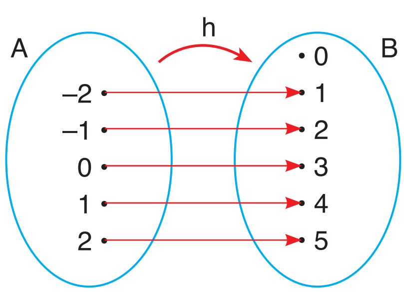
ÇÖZÜM

$f(x) = x^2$ için $f(-2) = 4$, $f(2) = 4$, $f(-1) = 1$, $f(1) = 1$, $f(0) = 0$ olur.



$f(-2) = f(2) = 4$ ve $f(-1) = f(1) = 1$ olduğundan f fonksiyonu bire bir fonksiyon değildir.

h(x) = x + 3 için h(–2) = 1, h(–1) = 2, h(0) = 3, h(1) = 4, h(2) = 5 olur.



h fonksiyonunda tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü farklı olduğu için bire bir fonksiyon olma koşulunu sağlar. Dolayısıyla h fonksiyonu bire bir fonksiyondur.

2

Örten ve İçine Fonksiyon

Bilgi

A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere, $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin. $f(A)$ görüntü kümesi olmak üzere;

$f(A) = B$ ise f ye **örten fonksiyon**, $f(A) \neq B$ ise yani değer kümesinde, tanım kümesindeki herhangi bir eleman ile eşlenmeyen en az bir eleman açıkta kalıyorsa f ye **içine fonksiyon** denir.

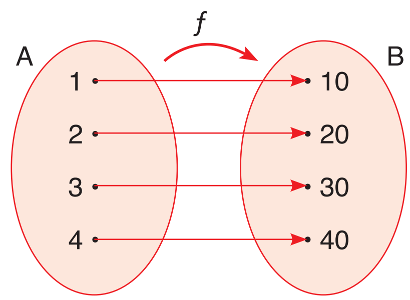
ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{10, 20, 30, 40\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ olmak üzere

$f: A \rightarrow B$, $f(x) = 10x$ ve $h: A \rightarrow C$, $h(x) = 2x$ fonksiyonlarının görüntü ve değer kümelerini belirleyelim.

f ve h fonksiyonlarının örten ya da içine fonksiyon olup olmadığını bulalım.

ÇÖZÜM

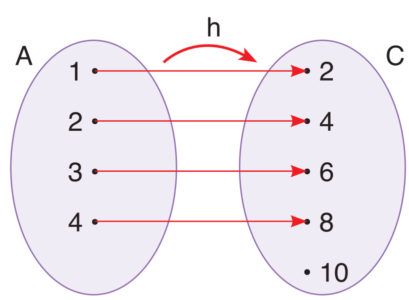


Değer kümesi $= \{10, 20, 30, 40\} = B$

Görüntü kümesi $= \{10, 20, 30, 40\} = f(A)$

Değer kümesi = Görüntü Kümesi

$B = f(A)$ olduğundan f fonksiyonu örten fonksiyondur.



Değer kümesi $= \{2, 4, 6, 8, 10\} = C$

Görüntü kümesi $= \{2, 4, 6, 8\} = h(A)$

Değer kümesi $\neq$ Görüntü Kümesi

$C \neq h(A)$ olduğundan h fonksiyonu içine fonksiyondur.

ÖRNEK

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 7, 12, 19\}$ ve $f: A \longrightarrow B$ olmak üzere $f(x) = x^2 + 3$ fonksiyonunun örten fonksiyon olup olmadığını bulalım.

ÇÖZÜM

Tanım kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntü kümesinin elemanlarını bulalım.

$f(0) = 0^2 + 3 = 3$

$f(1) = 1^2 + 3 = 4$

$f(2) = 2^2 + 3 = 7$

$f(3) = 3^2 + 3 = 12$

$f(4) = 4^2 + 3 = 19$ olur.

Dolayısıyla $f(A) = \{3, 4, 7, 12, 19\}$ olarak bulunur. $f(A) = B$ yani görüntü kümesi ile değer kümesi birbirine eşit olduğu için f fonksiyonu örten fonksiyondur.

ÖRNEK

$A = \{x, y, z\}$, $B = \{a, b, c\}$ ve $f: A \to B$ olmak üzere aşağıda verilen fonksiyonların bire bir ve örten olup olmadıklarını inceleyelim.

a) $f = \{(x, a), (y, b), (z, c)\}$

b) $f = \{(x, a), (y, a), (z, b)\}$

c) $f = \{(x, a), (y, a), (z, a)\}$

ç) $f = \{(x, b), (y, a), (z, c)\}$

ÇÖZÜM

a) Tanım kümesindeki her farklı elemanın farklı bir görüntüsü vardır. Fonksiyon bire birdir.

$f(x) = a$, $f(y) = b$, $f(z) = c$ ve $f(A) = \{a, b, c\} = \{a, b, c\} = B$ olduğundan fonksiyon örtendir.

b) $f(x) = a$ ve $f(y) = a$ olduğundan fonksiyon bire bir değildir.

$f(A) = \{a, b\} \neq \{a, b, c\} = B$ olduğundan fonksiyon örten değildir yani içinedir.

c) $f(x) = a$, $f(y) = a$ ve $f(z) = a$ olduğundan fonksiyon bire bir değildir.

$f(A) = \{a\} \neq \{a, b, c\} = B$ olduğundan örten değildir yani içinedir.

ç) Tanım kümesindeki her farklı elemanın farklı bir görüntüsü vardır. Fonksiyon bire birdir.

$f(x) = b$, $f(y) = a$, $f(z) = c$ ve $f(A) = \{b, a, c\} = \{a, b, c\} = B$ olduğundan fonksiyon örtendir.

ÖRNEK

$A = \{m, n, t\}$ $B = \{y, z, k\}$ olmak üzere $f: A \to B$ bire bir ve örten kaç fonksiyon oluşturulabileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

- $f = \{(m, y), (n, z), (t, k)\}$
- $f = \{(m, z), (n, y), (t, k)\}$
- $f = \{(m, k), (n, y), (t, z)\}$
- $f = \{(m, y), (n, k), (t, z)\}$
- $f = \{(m, z), (n, k), (t, y)\}$
- $f = \{(m, k), (n, z), (t, y)\}$

olmak üzere toplam 6 tane bire bir ve örten fonksiyon yazılabilir.

Tek ve Çift Fonksiyonlar

Bilgi

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için,

- $f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonu **tek fonksiyon**dur.
- $f(-x) = f(x)$ ise f fonksiyonu **çift fonksiyon**dur.

Tek fonksiyonların grafikleri başlangıç noktasına (orijine) göre, çift fonksiyonların grafikleri ise y eksenine göre simetriktir.

ÖRNEK

Aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift fonksiyon olup olmadıklarını inceleyelim.

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 1$

b) $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^3 + x$

ÇÖZÜM

a) $y = f(x)$ de x yerine $(-x)$ yazarız.

$f(x) = x^4 + 1 \Rightarrow f(-x) = (-x)^4 + 1 = x^4 + 1 = f(x)$ olur.

Bu durumda aynı fonksiyonu elde etmiş oluruz.

$f(-x) = f(x)$ olduğundan $f(x)$, çift fonksiyondur.

b) $y = g(x)$ de x yerine $(-x)$ yazalım:

$g(x) = 3x^3 + x \Rightarrow g(-x) = 3 \cdot (-x)^3 + (-x)$ ve $g(-x) = -3x^3 - x = -(3x^3 + x) = -g(x)$

Bu durumda $g(-x) = -g(x)$ elde edilir. O hâlde $g(x)$, tek fonksiyondur.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun tek veya çift fonksiyon olup olmadığını bulalım.

ÇÖZÜM

$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x)$ ve $f(-x) = x^2 - 2x$ olur. Bu durumda $f(-x) \neq f(x)$ ve $f(-x) \neq -f(x)$ bulunur. O hâlde bu fonksiyon ne çift ne de tek fonksiyondur.

Fonksiyonlarda Dört İşlem

Cep telefonları son yıllarda hızla gelişmekte ve daha önce hiç aklımıza gelmeyecek birçok yenilikle karşımıza çıkmaktadır. Her geçen gün yeni bir çok özelliği olan telefonlar üretilmektedir.

Teknoloji sayesinde haberleşme dışında Genel Ağ özelliği ile iş dünyası, eğlence gibi birçok alanda cep telefonları vazgeçilmez olmuştur. "Akıllı" telefonlar, birçok fonksiyonu ile bilgisayarların yerini almaya başlamıştır. Bu akıllı telefonlara yüklenen özel programlar sayesinde fonksiyon hesaplamaları da gerçekleştirilmektedir. Bu hesaplamaların arasında fonksiyonlarda dört işlem yapmayı gerektiren durumlar da vardır.

Sevdiklerimize ulaşabilmek, onlarla anı paylaşabilmek kolaylaşmıştır. Çalışma hayatına da sağladığı katkılar az değildir.

Ancak iletişim araçları, yararlı olduğu kadar bilinçli kullanılmadığında zararlı hale gelmektedir.

Akşamları evlerde aile bireylerinin birbirlerine vakit ayırmak yerine cep telefonlarıyla oyalanmaları sağlıksız iletişime dolayısıyla çocukların ve gençlerin olumsuz etkilenmesine yol açabilmektedir. Misafirlikte veya bir arkadaş toplantısında sürekli cep telefonu ile ilgilenmek karşı tarafa bir nevi onu iyi dinlemediği ve saygı duymadığı hissini oluşturmaktadır.

Cep telefonları, araç kullanıcılarının bu konudaki sorumsuzluğu nedeniyle trafik kazalarının sebepleri arasına girmiştir.

Günümüzde teknolojiyi yerinde ve zamanında kullanabilmek çok önem taşımaktadır. Bu konuda, özellikle çocuklar ve gençlerin kendilerini kontrol edebilmeleri gerekmektedir.

Bilgi

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g: B \longrightarrow \mathbb{R}$ verilsin, $A \cap B \neq \varnothing$ ve $x \in A \cap B$ olsun. Buna göre,

1) $(f+g): A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

2) $(f-g): A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

3) $(f \cdot g): A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right): A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad (g(x) \neq 0)$

5) $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$ tir.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ ve $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = 2x + 1$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre aşağıdaki işlemleri yapalım.

a) $(f + g)(x)$ **b)** $(3f - 2g)(x)$ **c)** $(f \cdot g)(x)$

ÇÖZÜM

a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$= 3x + 1 + 2x + 1$
$= 5x + 2$ olur.

b) $(3f - 2g)(x) = 3f(x) - 2g(x)$
$= 3(3x + 1) - 2(2x + 1)$
$= 9x + 3 - (4x + 2) = 5x + 1$ olur.

c) $(f \cdot g)(x) = (3x + 1) \cdot (2x + 1) = (3x)(2x) + 3x \cdot 1 + 1 \cdot 2x + 1 \cdot 1 = 6x^2 + 5x + 1$ olur.

ÖRNEK

$f = \{(1, -1), (2, 5), (3, 0), (4, 3)\}$ ve $g = \{(1, 3), (2, -1), (4, 1), (5, 2)\}$ veriliyor. Buna göre aşağıdaki fonksiyonları bulalım.

a) $3 \cdot g$ **b)** $f + g$ **c)** $f \cdot g$ **ç)** $\dfrac{f}{g}$

ÇÖZÜM

a) Tanım kümesi değişmeyecek şekilde sadece görüntü kümesindeki elemanların 3 katını alırız.
Buna göre $3 \cdot g = \{(1, 3 \cdot 3), (2, 3 \cdot (-1)), (4, 3 \cdot 1), (5, 3 \cdot 2)\} = \{(1, 9), (2, -3), (4, 3), (5, 6)\}$ olur.

b) f ve g nin tanım kümesindeki ortak elemanları alırız ve bu elemanların görüntülerini toplarız.
$f + g = \{(1, -1 + 3), (2, 5 - 1), (4, 3 + 1)\} = \{(1, 2), (2, 4), (4, 4)\}$ olur.

c) f ve g nin tanım kümesindeki ortak elemanları alırız ve bu elemanların görüntülerini çarparız.

$f \cdot g = \{(1,(-1)\cdot 3),(2,5\cdot(-1)),(4,3\cdot 1)\} = \{(1,-3),(2,-5),(4,3)\}$ olur.

ç) f ve g nin tanım kümesindeki ortak elemanları alırız ve bu elemanların görüntülerini böleriz.

$\frac{f}{g} = \left\{\left(1,\frac{-1}{3}\right),\left(2,\frac{5}{-1}\right),\left(4,\frac{3}{1}\right)\right\} = \left\{\left(1,\frac{-1}{3}\right),(2,-5),(4,3)\right\}$ olarak bulunur.

Etkinlik

$f = \{(1,3),(2,4),(3,2),(4,1)\}$ ve $g = \{(1,2),(3,5),(4,4)\}$ veriliyor.

◈ $f + g$ ve $f - g$ yi bulunuz.

✷ Tanım kümeleri hangi sayılardan oluşur?

◈ f ve g yi analitik düzlemde gösteriniz.

◈ Aynı şekilde $f + g$ ve $f - g$ yi de analitik düzlemde gösteriniz.

✷ Bu fonksiyonların tanım kümeleri aynı mıdır? Açıklayınız.

✷ Bu fonksiyonların görüntü kümeleri değişmiş midir? İnceleyiniz.

ÖRNEK

$f = \{(1,2),(a,5),(3,1)\}$, $g = \{(1,4),(a,b),(2,7)\}$ kümeleri veriliyor.

$(f \cdot g)(1) = (f - g)(a)$ ise b yi bulalım.

ÇÖZÜM

$f(1)\cdot g(1) = f(a) - g(a)$ olduğundan $2\cdot 4 = 5 - b \Rightarrow 8 = 5 - b \Rightarrow b = -3$ bulunur.

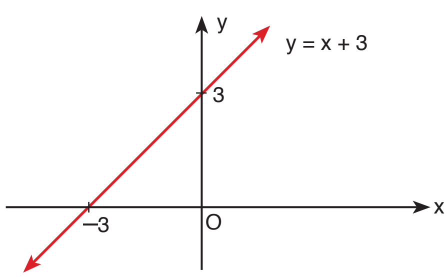
Fonksiyonların Grafiği

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

$f(x) = y = x + 3$
$x = 0$ için $y = 3$ olduğundan f nin grafiği,
y eksenini $(0,3)$ noktasında keser.
$y = 0$ için $x = -3$ olduğundan f nin grafiği,
x eksenini $(-3,0)$ noktasında keser.



ÖRNEK

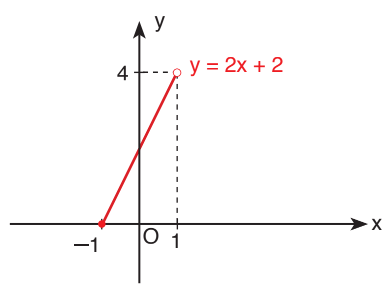
$f:[-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

$f(x) = y = 2x + 2$

$x = -1$ için $y = 0$ $(-1, 0)$
$x = 1$ için $y = 4$ $(1, 4)$ bulunur.

$f:[-1,1)$ de tanımlı olduğundan $x = 1$ için $f(1) = 4$ noktası grafiğe dahil değildir.

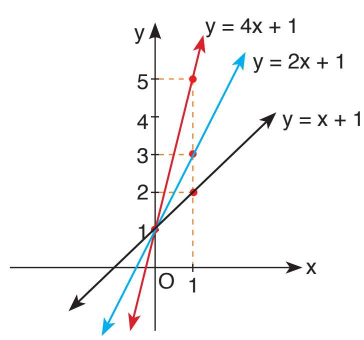


ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, h:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x + 1$ ve $h(x) = 4x + 1$ fonksiyonlarının grafiğini aynı analitik düzlemde çizelim.

ÇÖZÜM

$f(x) = y = x + 1$	$g(x) = y = 2x + 1$	$h(x) = y = 4x + 1$
$x = 0$ için $y = 1$	$x = 0$ için $y = 1$	$x = 0$ için $y = 1$
$x = 1$ için $y = 2$	$x = 1$ için $y = 3$	$x = 1$ için $y = 5$



ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x+1, & x \geq 0 \ \text{ ise} \\ 2x-4, & x < 0 \ \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

$f(x)$ fonksiyonun kritik noktası 0 dır.

$x \geq 0;$

$y = x + 1,$

$x = 0$ için $y = 1, \quad (0,1)$

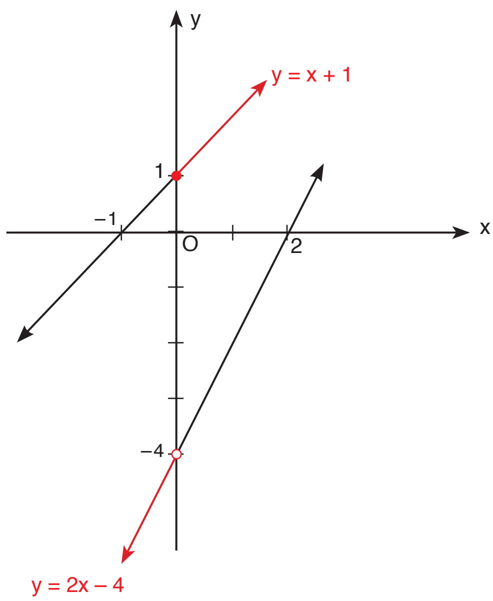
$y = 0$ için $x = -1, \quad (-1,0)$

$x < 0;$

$y = 2x - 4,$

$x = 0$ için $y = -4, \quad (0,-4)$

$y = 0$ için $x = 2 \quad (2,0)$ bulunur.



Grafikte kırmızı ile gösterilen kısım f fonksiyonunun grafiğini ifade etmektedir.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x-2, & x > 1 \text{ ise} \\ x+3, & x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

$f(x)$ fonksiyonun kritik noktası 1 dir.

$x > 1;$

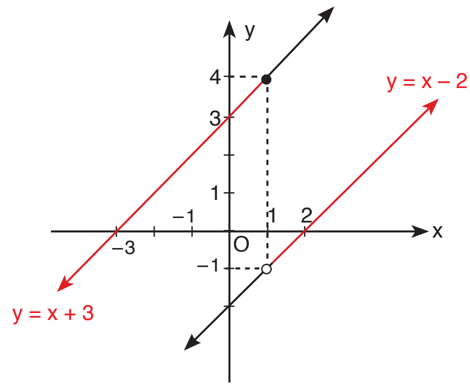
$y = x-2, \quad x = 1$ için $y = -1, \quad (1,-1)$

$y = 0$ için $x = 2, \quad (2,0)$

$x \leq 1;$

$y = x+3, \quad x = 1$ için $y = 4, \quad (1,4)$

$y = 0$ için $x = -3 \quad (-3,0)$ bulunur.



Şekilde kırmızı çizgi ile gösterilen kısım $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğidir.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |4-2x|$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

Önce mutlak değerin içerisindeki denklemi 0 a eşitleyelim.

$4 - 2x = 0$

$4 = 2x$

$x = 2$ olur.

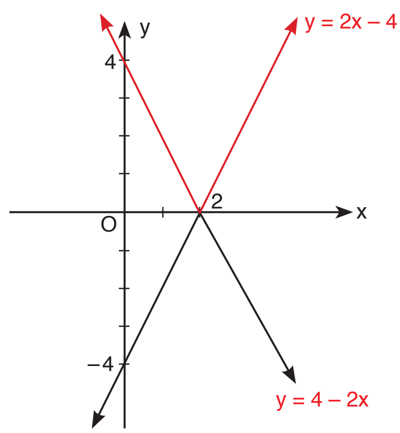
$x = 2$ değerine göre parçalı fonksiyonu oluşturalım.

$f(x) = |4-2x| = \begin{cases} 4-2x, & x \leq 2 \text{ ise} \\ 2x-4, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

$y = 4 - 2x$ fonksiyonunda;

$x = 0$ için $y = 4$ ve $y = 0$ için $x = 2$ olur. $(0, 4)$ ve $(2, 0)$ noktaları bulunur. $y = 2x - 4$ fonksiyonunda;

$x = 0$ için $y = -4$ ve $y = 0$ için $x = 2$ olur. $(0, -4)$ ve $(2, 0)$ noktaları bulunur. Bulduğumuz noktaları grafikte işaretleyelim ve grafiği çizelim.



$f(x) = |4-2x|$ fonksiyonun grafiğini;

$x > 2$ için $y = 2x - 4$ ve $x \leq 2$ için $y = 4 - 2x$ fonksiyonlarının grafiği yardımı ile çizeriz.

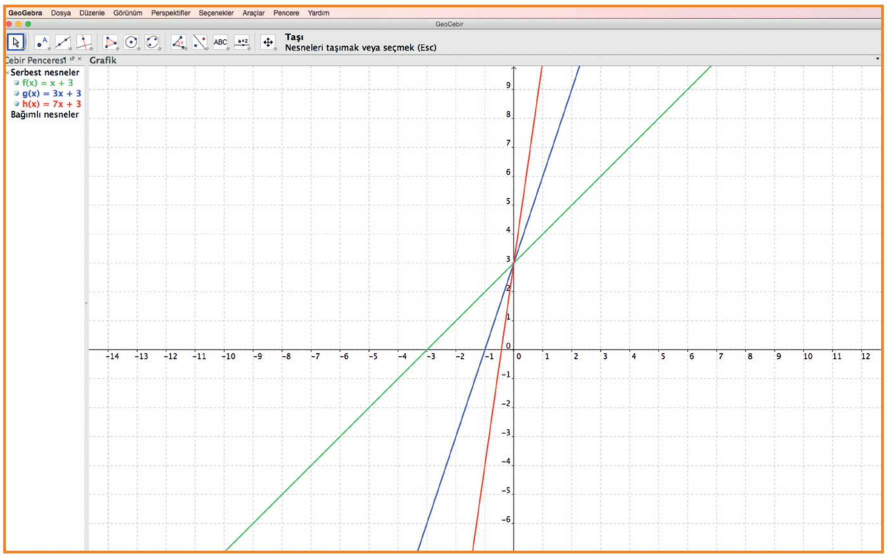
Şekilde kırmızı çizgi ile gösterilen kısım $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğidir.

Bilgi İletişim Teknolojisi

1. Genel ağdan “GeoGebra” programını indirerek bilgisayarınıza kurunuz.

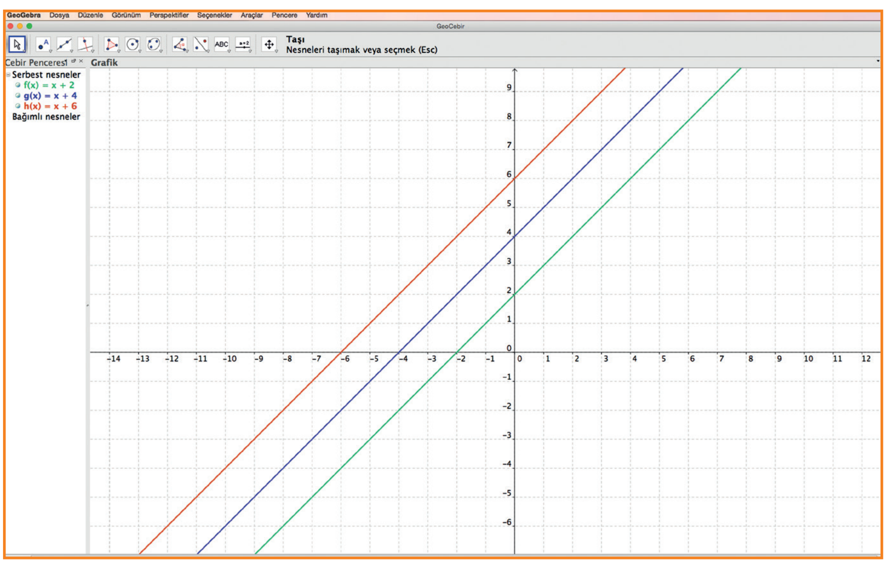
2. Kurduğunuz programı çalıştırınız.

3. Giriş: kısmına sırası ile $x+3$, $3x+3$ ve $7x+3$ yazarak $f(x)=x+3$, $g(x)=3x+3$ ve $h(x)=7x+3$ fonksiyonlarının grafiklerini oluşturunuz.



4. $f(x)=ax+b$ fonksiyonunda $a>0$ için a nın değeri büyüdükçe ($f(x)$ için $a=1$, $g(x)$ için $a=3$ ve $h(x)$ için $a=7$) grafiğin y eksenine yaklaştığı görülmektedir.

5. Yeni bir pencerede “Giriş” kısmına sırası ile $x+2$, $x+4$ ve $x+6$ yazarak $f(x)=x+2$, $g(x)=x+4$ ve $h(x)=x+6$ fonksiyonlarının grafiklerini oluşturunuz.

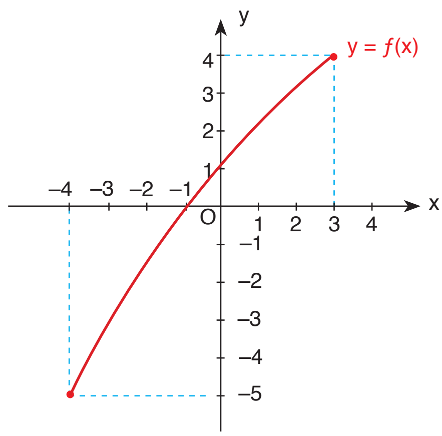


6. $f(x)=ax+b$ fonksiyonunda $b>0$ için b nin değeri büyüdükçe ($f(x)$ için $b=2$, $g(x)$ için $b=4$ ve $h(x)$ için $b=6$) grafiğin y ekseninde b birim kadar yukarı ötelendiği görülmektedir.

Bilgi

Fonksiyon grafiğinin üzerindeki her bir noktadan y eksenine paralel çizilen doğruların x eksenini kestiği noktalar fonksiyonun tanım kümesini, x eksenine paralel çizilen doğruların y ekseninde kestiği noktalar fonksiyonun görüntü kümesini oluşturur.

ÖRNEK

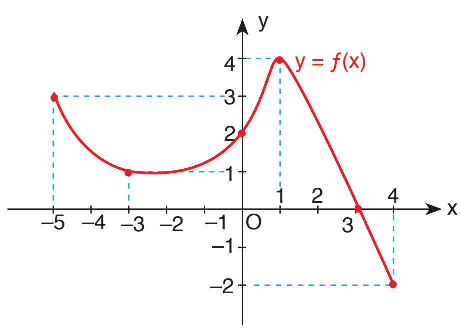


Yukarıda grafiği verilen y = f(x) fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulalım.

ÇÖZÜM

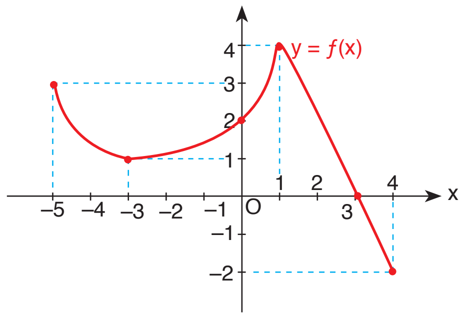
Grafiği verilen y = f(x) fonksiyonunun tanım kümesi $[-4,3]$, görüntü kümesi $[-5,4]$ olur.

ÖRNEK



Yukarıda grafiği verilen y = f(x) fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini gösterelim, tanım kümesindeki –5, –3, 0, 1, 3 ve 4 noktalarının f fonksiyonu altındaki görüntülerini inceleyelim.

ÇÖZÜM



y = f(x) fonksiyonunun tanım kümesi $[-5,4]$, görüntü kümesi $[-2,4]$ olur.

y = f(x) fonksiyonunun grafiği üzerindeki noktaları incelediğimizde,

(– 5, 3) noktası için $f(-5)=3$

(– 3, 1) noktası için $f(-3)=1$

(0, 2) noktası için $f(0)=2$

(1, 4) noktası için $f(1)=4$

(3, 0) noktası için $f(3)=0$

(4,–2) noktası için $f(4)=-2$ olur.

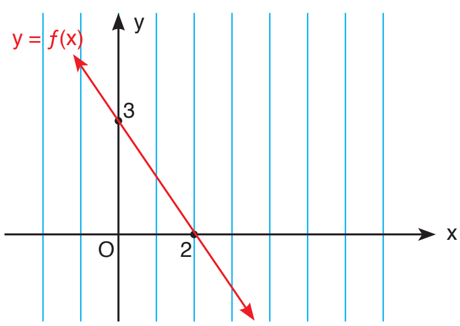
Bilgi

Fonksiyonunun x ekseni üzerinde tanımlı olduğu her bir noktadan y eksenine paralel çizilen doğruların grafiği yalnızca bir noktada kesmesi gerekir. Bu doğrular grafiği birden fazla noktada kesiyorsa grafik, fonksiyon grafiği değildir. Bu işleme "düşey (dikey) doğru testi" adı verilir.

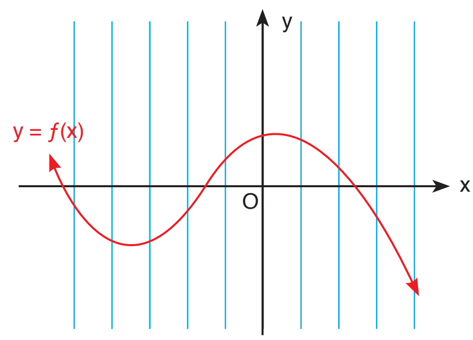
ÖRNEK

Verilen grafiklerin fonksiyon belirtip belirtmediğini bulalım.

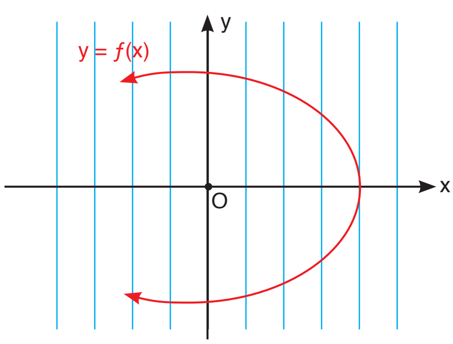
a)



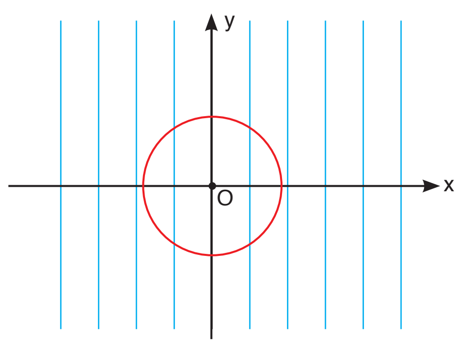
b)



c)



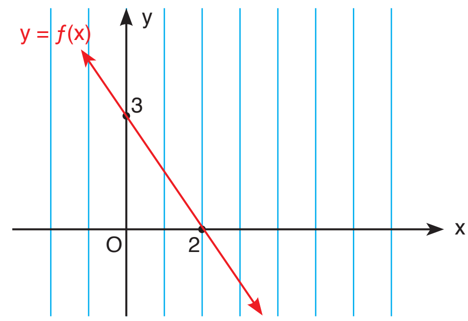
ç)



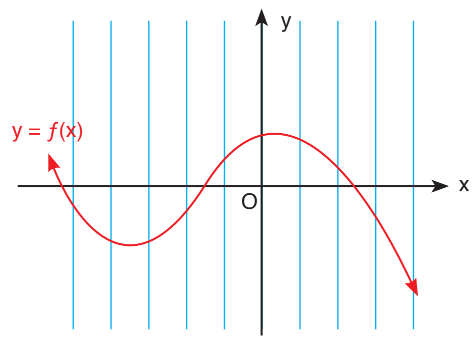
2

ÇÖZÜM

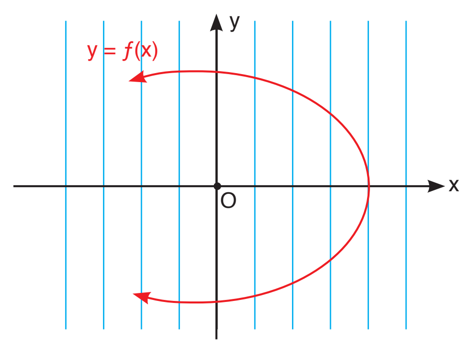
a) Çizilen düşey doğruların hepsi grafiği yalnız bir noktada kestiği için y = f(x) fonksiyondur.



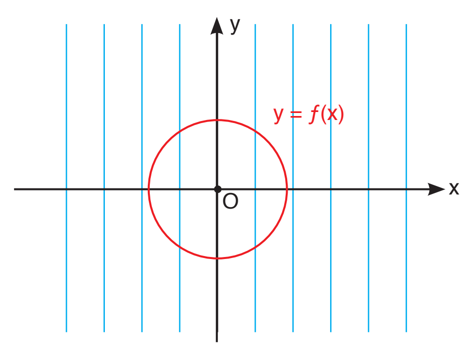
b) Çizilen düşey doğruların hepsi grafiği yalnız bir noktada kestiği için y = f(x) fonksiyondur.



c) Çizilen düşey doğrular grafiği birden fazla noktada kestiği için y = f(x) fonksiyon değildir.

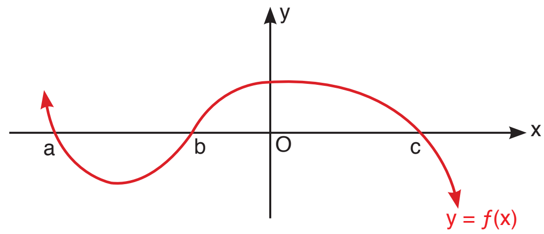


ç) Çizilen düşey doğrular grafiği birden fazla noktada kestiği için y = f(x) fonksiyon değildir.

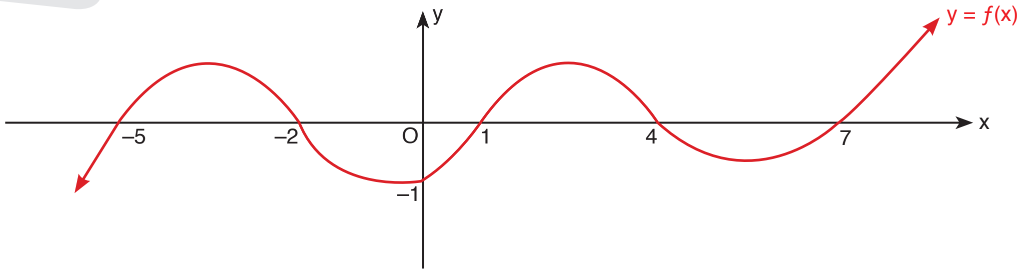


Bilgi

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinde $f(x) = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesinin elemanları, grafiğin x eksenini kestiği noktaların apsisidir. Yani $x = a$, $x = b$ ve $x = c$ olur.



ÖRNEK



$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $f(x) = 0$ denklemini sağlayan noktaları bulalım ve bu noktaların toplamını yazalım.

ÇÖZÜM

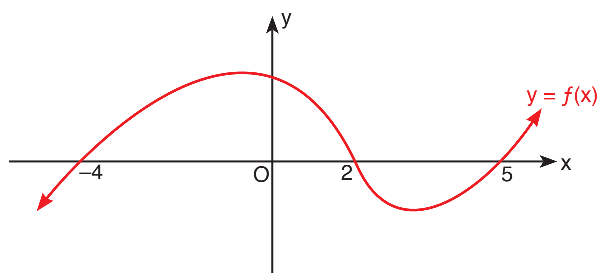
$f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesinin elemanları,

$x = -5$, $x = -2$, $x = 1$, $x = 4$ ve $x = 7$ dir.

Bunların toplamı ise $(-5) + (-2) + 1 + 4 + 7 = 5$ olur.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $f(x + 3) = 0$ eşitliğini sağlayan x sayılarının toplamını bulalım.



ÇÖZÜM

$f(x + 3) = 0$ olduğuna göre,

$$\left.\begin{array}{l} x + 3 = -4 \Rightarrow x = -7 \\ x + 3 = 2 \Rightarrow x = -1 \\ x + 3 = 5 \Rightarrow x = 2 \end{array}\right\} (-7) + (-1) + 2 = -6 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Efe araba ile hız sınırı 90 km/sa. olan bir yolda 90 km/sa. sabit hızla gitmektedir.

Buna göre,

a) Arabanın 5 saatin sonunda kaç km yol almış olacağını bulalım.

b) Arabanın 270 km lik yolu kaç saatte alacağını bulalım.

c) Alınan mesafe ile zaman arasındaki ilişkiyi grafik üzerinde gösterelim.

ÇÖZÜM

a) x: arabanın belirli bir mesafeyi alma süresi (saat)

y: x e bağlı alınan mesafe

$y = f(x) = 90 \cdot x$ tir. Buna göre araba 5 saatin sonunda

$x = 5$ için $f(5) = 90 \cdot 5$

$= 450$ km yol alır.

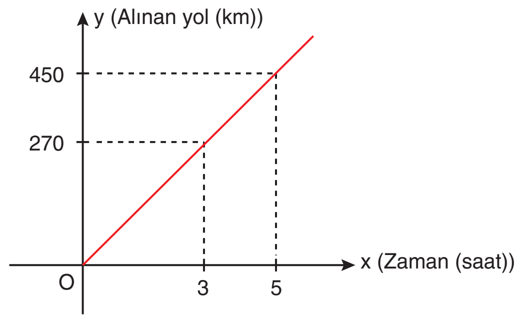
b) $f(x) = 90 \cdot x$ ise 270 km lik mesafe

$270 = 90 \cdot x$

$x = 3$ saatte alınır.

c) Değer tablosunu oluşturalım.

x	0	3	5
y	0	270	450



Araç, sabit hızla gittiğinden alınan yol ile zaman arasında doğrusal ilişki vardır.

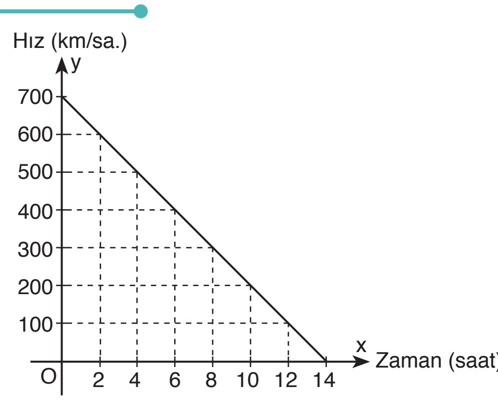
ÖRNEK

$f(x) = -50x + 700$ fonksiyonu bir uçağın 700 km/sa. hız ile havada iken inişe geçtiği ve hava alanına indiği ana kadarki hız-zaman ifadesidir. Uçağın hız-zaman grafiğini çizelim.

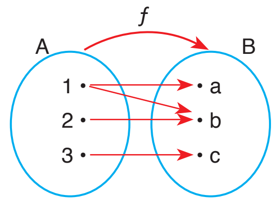
ÇÖZÜM

$x = 0$ için $f(0) = y = -50 \cdot 0 + 700 = 700$, $(0, 700)$

$y = 0$ için $0 = -50x + 700$ den $50x = 700$ ve $x = 14$ $(14, 0)$ olup uçağın hız-zaman grafiği yandaki gibi olur.



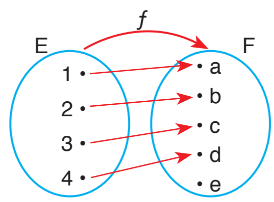
Alıştırmalar 2-1



1) f nin bir fonksiyon olması için aşağıdaki sıralı ikililerden hangisi çıkarılmalıdır?

A) (a, 1) B) (1, a) C) (b, 2) D) (2, b) E) (3, c)

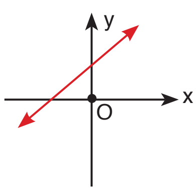
2) $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere A dan B ye tanımlanmış bir f fonksiyonunu şema ile gösteriniz.

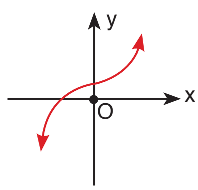


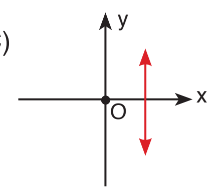
3) Yandaki şekilde f fonksiyonu verilmiştir. Buna göre tanım, değer ve görüntü kümelerini yazınız.

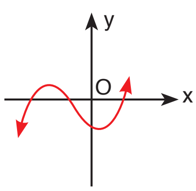
4) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ olmak üzere A dan B ye tanımlı $f = \{(1,5), (2,6), (3,3), (4,7)\}$ fonksiyonunun görüntü kümesini yazınız.

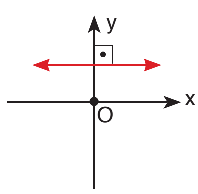
5) Aşağıdakilerden hangisi fonksiyon **değildir**?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

6) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 7$ doğrusal fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(-1) + f(4)$ işleminin sonucunu bulunuz.

7) $f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$, $f(x) = \dfrac{3x - 5}{2x + 4}$ olduğuna göre $f(0) + f(5)$ işleminin sonucunu bulunuz.

8) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax + 4$ veriliyor. $f(1) = 6$ ise $f(4)$ kaçtır?

9) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^2$ fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonu altındaki görüntüsü 144 olan x ekseni üzerindeki noktalar aşağıdakilerden hangisidir?

A) –9 ve 9 B) –10 ve 10 C) –11 ve 11 D) –12 ve 12 E)–44 ve 44

10) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$ ve $f: A \rightarrow B$ olmak üzere aşağıdakilerden hangisi bire bir fonksiyon ifade eder?

A) $\{(1, 6), (2, 8), (3, 5)\}$

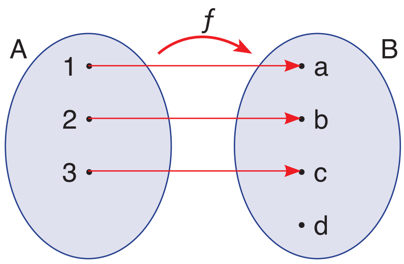
B) $\{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$

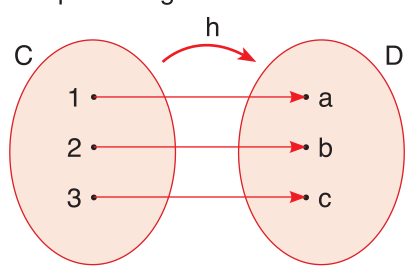
C) $\{(1, 8), (2, 8), (3, 5)\}$

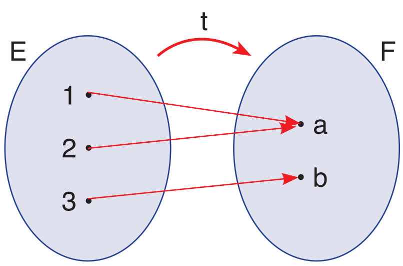
D) $\{(1, 7), (2, 7), (3, 6)\}$

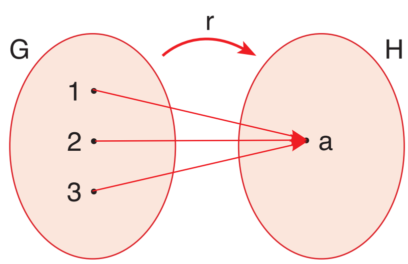
E) $\{(1, 5), (2, 6), (3, 6)\}$

11) Aşağıda verilen fonksiyonların bire bir veya örten olup olmadığını belirtiniz.

a)


b)


c)


d)


12) Aşağıda kuralları verilen ve $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı f, g ve h fonksiyonlarının tek veya çift olup olmadıklarını bulunuz.

a) $f(x) = x^2 + 3$ b) $g(x) = 5x$ c) $h(x) = x^3 + x^2$

13) $f:[-4, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g:(-3, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ dir.

Buna göre $(f + g)(x)$ in tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-1, 3)$ B) $[-1, 2)$ C) $(-3, 2)$ D) $[-4, 5]$ E) $(-3, 2]$

14) $f = \{(-1,0),(2,3),(3,7)\}$

$g = \{(-1,2),(3,5),(4,2)\}$ ise $(g - f)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(-1,-2)\}$

B) $\{(-1,2),(1,2),(1,-5)\}$

C) $\{(-1,2),(3,-2)\}$

D) $\{(-1,2),(1,-2)\}$

E) $\{(-1,2),(1,-2),(1,-5)\}$

15) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 5$ ve $g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre $(f \cdot g)(3)$ ün sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) –12 B) –10 C) 1 D) 5 E) 12

16) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$ ve $g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + a$ fonksiyonları veriliyor.

$(f + g)(3) = (f \cdot g)(2)$ ise a aşağıdakilerden hangisidir?

A) –4 B) $-\frac{14}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{10}{3}$ E) $\frac{14}{3}$

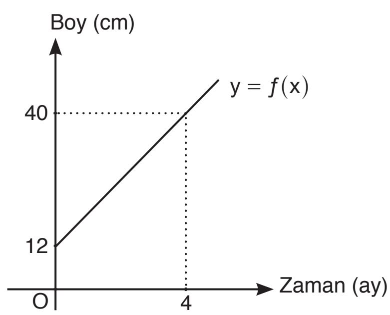
17) $f = \{(1,3),(2,-5),(4,1)\}$

$g = \{(1,5),(2,a),(3,7)\}$ ve

$(f + g)(1) = \left(\frac{g}{f}\right)(2)$ ise a aşağıdakilerden hangisidir?

A) –40 B) –20 C) 10 D) 20 E) 40

18)



Yukarıda verilen $y = f(x)$ doğrusal fonksiyonu bir bitkinin zamana bağlı boy değişimini vermektedir. Buna göre yedinci ay sonunda bitkinin boyu kaç cm olur?

2.2. İki Fonksiyonun Bileşkesi ve Bir Fonksiyonun Tersi

Bire Bir ve Örten Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar

Herhangi iki küme arasında tanımlanan bir fonksiyon, bu iki küme arasında bir eşleme yapar.

Kullandığımız sayı sistemindeki doğal sayılar, tam sayılar, gerçek sayılar birer küme olduğu için bu kümelerin elemanlarını eşleştiren fonksiyonlar sayı sisteminde kullanılan birer araçtır.

Fonksiyonlar, bir kümedeki elemanı, başka bir kümedeki elemana bağlamak için kullanılır. Bu iki küme dışında olan ve bu iki kümeden herhangi birine bağlı bir fonksiyon daha düşünürsek bu iki fonksiyon, üç kümeyi birbirine bağlamış olur.

Bu fonksiyonlar sayesinde sayı kümeleri arasında bir ağ kurmuş olmaz mıyız? Fonksiyonları birer uçak kabul edersek herhangi iki şehri birbirine bağlayan uçak yolculukları sayesinde tüm dünyaya kurulan bir ağ mevcut değil midir?

Bilgi

Bir fonksiyonun grafiği verildiğinde grafiği kesecek şekilde x eksenine paralel doğrular çizilir. Çizilen bu doğruların her biri grafiği yalnız bir noktada kesiyorsa fonksiyon bire bir fonksiyondur. Bu işleme **yatay doğru testi** denir.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonunun ve bire bir fonksiyon olup olmadığını hem cebirsel olarak hem de grafik çizerek bulalım.

ÇÖZÜM

Fonksiyonun bire bir olup olmadığını belirlemek için cebirsel yöntem kullanalım.

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \neq x_2$ olsun.

$$2x_1 \neq 2x_2$$

$$2x_1 + 3 \neq 2x_2 + 3$$

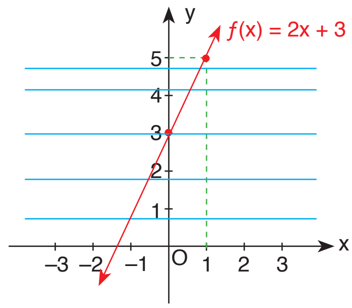
$f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu bire birdir.

$f(x) = 2x + 3$ fonksiyonun grafiğini çizebilmek için değer tablosu oluşturalım.

$x = 0$ için $f(0) = 3$

$x = 1$ için $f(1) = 5$

x	0	1
y	3	5

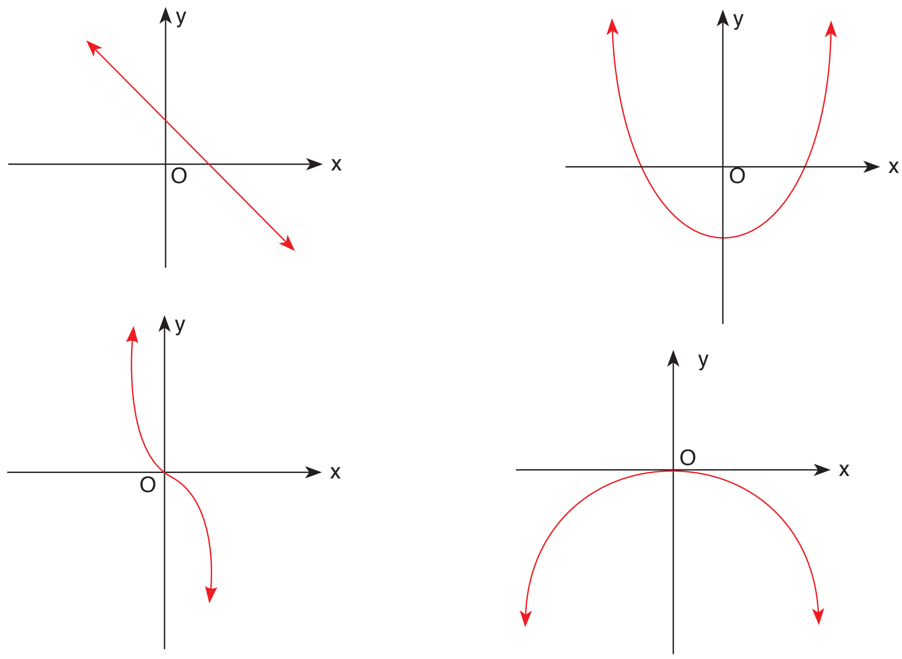


(0, 3) ve (1, 5) noktaları yardımı ile çizilen f doğrusal fonksiyonunun grafiği yukarıdaki gibidir.

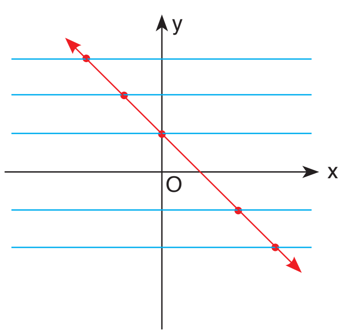
x eksenine paralel mavi renkle verilen doğrular, grafiği yalnız bir noktada kestiğinden fonksiyon bire birdir.

ÖRNEK

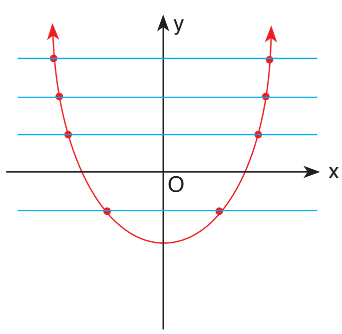
Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların bire bir olup olmadıklarını yatay doğru testi ile belirleyelim.



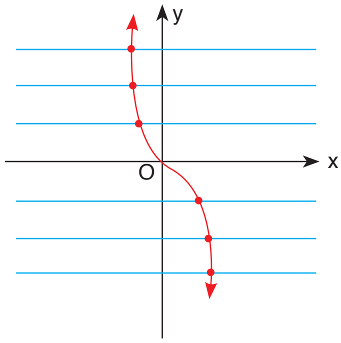
ÇÖZÜM



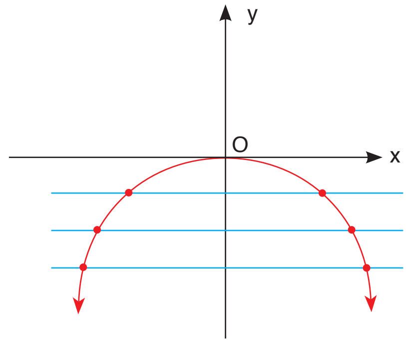
Fonksiyon bire birdir.



Fonksiyon bire bir değildir.



Fonksiyon bire birdir.

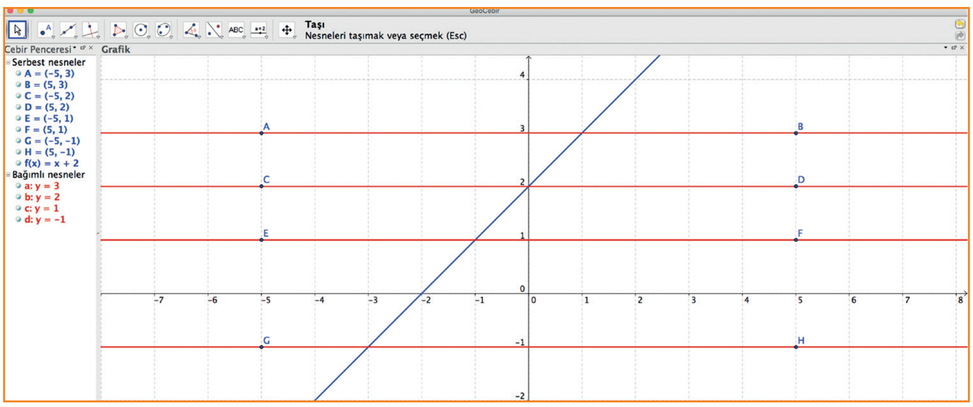


Fonksiyon bire bir değildir.

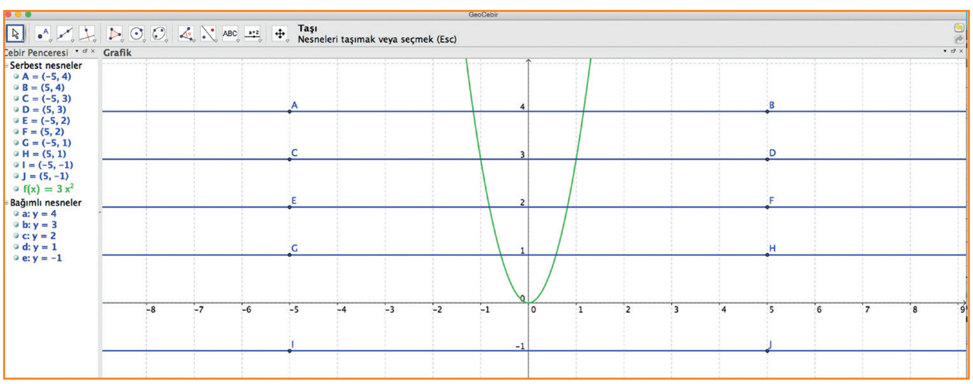
Bilgi İletişim Teknolojisi

1. Daha önce bilgisayarınıza indirmiş olduğunuz “GeoGebra” programı çalıştırınız

2. “Giriş” kısmına $x+2$ yazıp Enter tuşuna basınız. Doğru sekmesini kullanarak x eksenine paralel olacak şekilde doğrular çiziniz.



3. Yeni pencerede “Giriş” kısmına 3x^2 $(3x^2)$ yazıp Enter tuşuna basınız. Doğru sekmesini kullanarak x eksenine paralel olacak şekilde doğrular çiziniz.



x eksenine çizilen paralel doğrular $f(x)=x+2$ fonksiyonunun grafiğini bir noktada ve sürekli kestiğinden fonksiyon bire bir ve örtendir. x eksenine çizilen paralel doğrular $g(x)=3x^2$ fonksiyonunun grafiğini birden fazla noktada kestiğinden bire bir değildir. $g(x)=3x^2$ fonksiyonunun grafiğini kesmeyen doğrular da olduğundan örten değildir.

Fonksiyonlarda Bileşke İşlemi

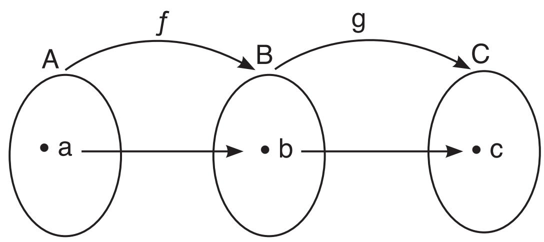
Bilgi

A, B, C kümeleri boş kümeden farklı üç küme olsun. f ve g fonksiyonları $f: A \longrightarrow B$ ve $g: B \longrightarrow C$ olmak üzere

$(gof)(x) = g(f(x))$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, f ve g fonksiyonlarının **bileşke fonksiyonu** denir ve bu, “g bileşke f” şeklinde okunur. $(gof): A \longrightarrow C$ dir.

Bilgi

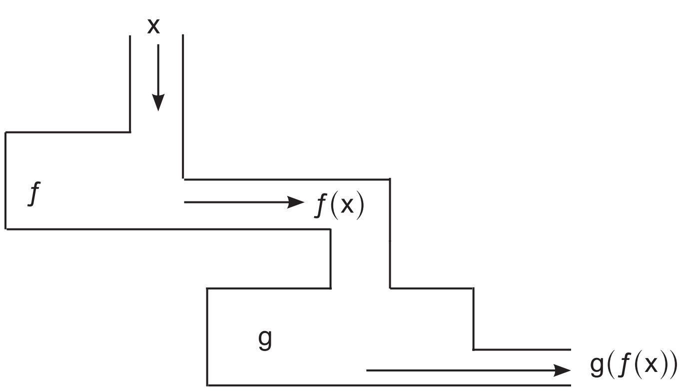


$a \in A,\ b \in B,\ c \in C$ olmak üzere $f(a) = b,\ g(b) = c$ olsun.

$(gof)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ dir.

$(gof): A \longrightarrow C$ şeklinde tanımlanır.

$f(x)$ ve $g(x)$ iki fonksiyon olmak üzere, $(gof)(x)$ fonksiyonunu fonksiyon makinesi olarak aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.



ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 4$ ve $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = 3x - 2$ fonksiyonları veriliyor.

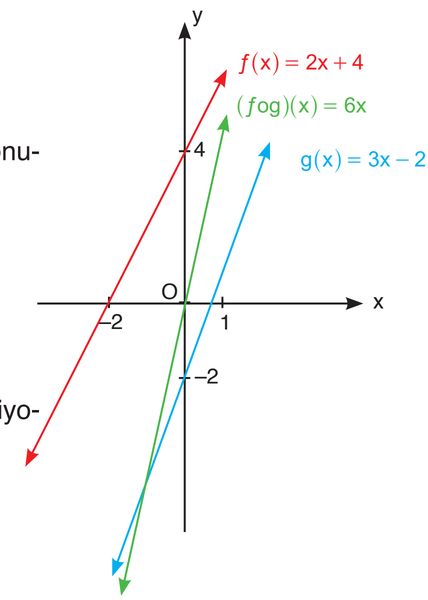
Buna göre $(f o g)$ fonksiyonunun kuralını bulalım ve analitik düzlemde $f(x), g(x)$ ve $(f o g)(x)$ grafiklerini çizelim.

ÇÖZÜM

$(f o g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow f(3x - 2) = 2(3x - 2) + 4 = 6x - 4 + 4$

$(f o g)(x) = 6x$ olur.

$y = 2x + 4$ fonksiyonu için
$x = 0$ için $y = 4$
$y = 0$ için $x = -2$
$(0, 4)$ ve $(-2, 0)$ noktaları yardımıyla $f(x)$ doğrusal fonksiyonunun grafiğini çizeriz.



$y = 3x - 2$ fonksiyonu için
$x = 0$ için $y = -2$
$y = 0$ için $x = \frac{2}{3}$
$(0, -2)$ ve $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ noktaları yardımıyla $g(x)$ doğrusal fonksiyonunun grafiğini çizeriz.

$y = 6x$ fonksiyonu için
$x = 0$ için $y = 0$
$x = 1$ için $y = 6$
$(0, 0)$ ve $(1, 6)$ noktaları yardımıyla $(f o g)(x)$ doğrusal fonksiyonunun grafiğini çizeriz.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - x$ ve $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = x - 3$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre $(f o g)(5)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$(f o g)(5) = f(g(5))$

Öncelikle $g(5)$ değerini bulmamız gerekir.

$g(5) = 5 - 3 = 2$ olduğundan $f(g(5)) = f(2) = 2^3 - 2 = 6$

$(f o g)(5) = 6$ bulunur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2$ ve

$g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = 2x + 1$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre fog fonksiyonunun kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

$(fog)(x) = f(g(x))$

$f(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 2$

$(fog)(x) = 4x^2 + 4x + 3$ bulunur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$ ve $g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = x + 1$ fonksiyonları veriliyor.

fog ve gof fonksiyonlarının kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+1) &= (x+1)^2 + 1\\ &= x^2 + 2x + 1 + 1\\ &= x^2 + 2x + 2 \text{ olur.}\end{aligned}$$

$(gof)(x) = g(f(x))$

$g(x^2 + 1) = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2$ olur.

Bu durumda $(fog)(x) \neq (gof)(x)$ olur.

Dikkat

Bileşke işleminin değişme özelliği yoktur.

$(fog)(x) \neq (gof)(x)$

ÖRNEK

$A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 6, 7, 12\}$ kümeleri veriliyor.

$f: A \longrightarrow B$, $f(x) = x^2 + 3$ ve $g: B \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 8$

olduğuna göre $(gof)(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$(gof)(x): A \longrightarrow \mathbb{R}$ olduğu için A kümesindeki elemanlar sırasıyla $f(x) = x^2 + 3$ fonksiyonunda x yerine yazalım. Buradan

$f(0) = 3, f(1) = 4, f(2) = 7$ ve $f(3) = 12$ olur.

$(gof)(0) = g(f(0))$, $f(0) = 3$ olduğundan $g(3) = -2$

$(gof)(1) = g(f(1))$, $f(1) = 4$ olduğundan $g(4) = 0$

$(gof)(2) = g(f(2))$, $f(2) = 7$ olduğundan $g(7) = 6$

$(gof)(3) = g(f(3))$, $f(3) = 12$ olduğundan $g(12) = 16$ bulunur.

Buna göre $(gof)(x)$ in görüntü kümesi, $\{-2, 0, 6, 16\}$ olur.

ÖRNEK

Kütlesi 50 kg olan bir dağcının x saniye sonra tırmanış yüksekliğini metre olarak veren fonksiyon $f(x) = 2x + 4$ olsun.

Dağcının yüksekliğe bağlı olarak kazandığı potansiyel enerji fonksiyonu $g(x) = 500x$ olsun. Bu dağcının zamana bağlı olarak kazandığı potansiyel enerjiyi veren fonksiyonun kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

Potansiyel enerjinin zamana bağlı değişimini veren fonksiyonu bulmak için öncelikle zamana bağlı yüksekliğin değişimini bulmalıyız.

x saniye sonra yükseklik $(2x + 4)$ metre olur.

Şimdi bulduğumuz ifadeyi potansiyel enerji fonksiyonunda yerine yazalım.

$(2x + 4)$ metredeki enerji, $g(2x + 4) = 500 \cdot (2x + 4)$

$$g(f(x)) = 1000x + 2000 \text{ olur.}$$

$(gof)(x) = 1000x + 2000$ fonksiyonu, x saniye sonra dağcının potansiyel enerjisini veren fonksiyondur.

Etkinlik

Bir araç saatte 40 km sabit hızla yol almaktadır. Araç, aldığı yolun 20 fazlasının $\frac{1}{5}$ i kadar (L) yakıt harcamaktadır.

◈ Aracın saate bağlı olarak aldığı yolun fonksiyonu olan $f(x)$ i bulunuz.

◈ Aracın aldığı yola bağlı olarak tükettiği yakıt fonksiyonu $g(x)$ olmak üzere $g(x)$ i bulunuz.

◈ Aracın saate bağlı olarak harcadığı yakıtı gösteren fonksiyonu bulunuz.

✷ Bulduğunuz fonksiyon ile aracın 6 saatte harcadığı yakıtı nasıl hesaplarsınız?

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (f o g)(x) = \dfrac{3g(x)-1}{2-g(x)}$ olduğuna göre $f(3)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$f(g(x)) = \dfrac{3g(x)-1}{2-g(x)}$ eşitliğinde $g(x)$ yerine x yazılırsa $f(x) = \dfrac{3x-1}{2-x}$ bulunur.

$f(3) = \dfrac{3 \cdot 3 - 1}{2-3} = \dfrac{8}{-1} = -8$ olur.

ÖRNEK

$A, B \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \longrightarrow B \;\; f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $(f o f)$ fonksiyonunun kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}(f o f)(x) = f(f(x)) &= f(x^2-1) \\ &= (x^2-1)^2 - 1 \\ &= (x^4 - 2x^2 + 1) - 1 = x^4 - 2x^2 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\; f(x) = 2x - 3$ ve

$g: \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{3\},\ g(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre, (fog) fonksiyonunun kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot \left(\frac{3x+1}{x-2}\right) - 3$$

$$= \frac{6x+2}{x-2} - 3 = \frac{6x+2-3x+6}{x-2}$$

$(fog)(x) = \dfrac{3x+8}{x-2}$ bulunur.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\},\ f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ ve

$g: \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{3}, 3\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{4\},\ g(x) = \dfrac{4x+2}{x-3}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre (fog) fonksiyonunun kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{4x+2}{x-3}\right)$$

$$= \frac{2 \cdot \left(\dfrac{4x+2}{x-3}\right) + 1}{\dfrac{4x+2}{x-3} - 1}$$

$$= \frac{\dfrac{8x+4}{x-3} + 1}{\dfrac{4x+2-x+3}{x-3}} = \frac{\dfrac{8x+4+x-3}{x-3}}{\dfrac{3x+5}{x-3}} = \frac{9x+1}{3x+5}$$ bulunur.

Bilgi

1) $\mathrm{I}(x) = x$ birim fonksiyon olmak üzere $(fo\mathrm{I})(x) = (\mathrm{I}of)(x) = f(x)$ olur.

2) Gerçek sayılar kümesinde f, g ve h fonksiyonları için

$(fogoh)(x) = ((fog)oh)(x) = (fo(goh))(x)$ tir.

Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliği vardır.

3) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için $(fog)(x) \neq (gof)(x)$ olduğundan bileşke işleminin değişme özelliği yoktur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ f(x) = x + 1,\ \ g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ g(x) = 2x - 4$ ve $h:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ h(x) = x^2 + 1$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre $(fogoh), (fog)oh$ ve $fo(goh)$ fonksiyonlarının kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

$$[(fogoh)](x) = [(fog)oh](x) = [f(g(x))oh]$$
$$= [f(2x-4)oh] = [(2x-4+1)oh]$$
$$= [(2x-3)oh] = 2\cdot(x^2+1) - 3 = 2x^2 - 1 \text{ olur.}$$

$$[(fogoh)](x) = [fo(goh)](x) = [fog(h(x))]$$
$$= [fo(2\cdot(x^2+1)-4)] = [fo(2x^2-2)]$$
$$= 2x^2 - 2 + 1 = 2x^2 - 1 \text{ olur.}$$

Buradan $[(fogoh)](x) = [(fog)oh](x) = [fo(goh)(x)]$ eşitliği bulunur.

Etkinlik

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ f(x) = 2x - 2,\ \ g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ g(x) = 3x + 1$ ve

$h:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ h(x) = x^2 + 1$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre;

- (fog) fonksiyonunun kuralını bulunuz.
- (goh) fonksiyonunun kuralını bulunuz.
- (gof) fonksiyonunun kuralını bulunuz.
- $(fo(goh))$ fonksiyonunun kuralını bulunuz.
- $((fog)oh)$ fonksiyonunun kuralını bulunuz.

✴ Son iki maddede bulduğunuz fonksiyonların kurallarının eşitliği bileşke fonksiyonunun hangi özelliğini hatırlatır?

2

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 2$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $(fof)(x+1) = 28$ eşitliğini sağlayan x değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$(fof)(x) = f(f(x)) = f(3x-2) = 3(3x-2) - 2$

$(fof)(x) = 9x - 8$ bulunur.

$(fof)(x+1) = 9(x+1) - 8 = 9x + 9 - 8$

$(fof)(x+1) = 9x + 1 = 28$ olduğundan

$9x = 27$ ise $x = 3$ bulunur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x + 4$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre $(fofofof)(2)$ ifadesinin değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$(fofofof)(2) = f(f(f(\underbrace{f(2)}_{6}))),\ f(2) = 2 + 4 = 6$ olduğundan

$f(f(\underbrace{f(6)}_{10})),\ f(6) = 6 + 4 = 10$ olduğundan

$f(\underbrace{f(10)}_{14}),\ f(10) = 10 + 4 = 14$ olduğundan $(fofofof)(2) = f(14) = 14 + 4 = 18$ bulunur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ f(x) = 3x - 4$ ve $g = \{(-1,3),(2,5),(3,4)\}$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre $(gof)(1) + (fog)(2)$ ifadesinin değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$(gof)(1) = g(\underbrace{f(1)}_{-1})$ $\qquad f(1) = 3 \cdot 1 - 4 = -1$ olduğundan

$= g(-1) = 3$ bulunur.

$(fog)(2) = f(g(2)),\ \ g(2) = 5$ olduğundan

$= f(5) = 3 \cdot 5 - 4 = 11$ bulunur. Buradan $(gof)(1) + (fog)(2) = 3 + 11 = 14$ olur.

ÖRNEK

$A, B \subset \mathbb{R}$ $(fog): A \longrightarrow B$, $(fog)(x+2) = x^2 + 3x$ ve $h(x) = (fog)(x) + 3$ olsun.

Buna göre $h(4)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$h(x) = (fog)(x) + 3$ eşitliğinde $x = 4$ yazılırsa

$h(4) = (fog)(4) + 3$ olur.

$(fog)(x+2) = x^2 + 3x$ eşitliğinde $x = 2$ yazılırsa

$(fog)(4) = 2^2 + 3 \cdot 2 = 10$ olur.

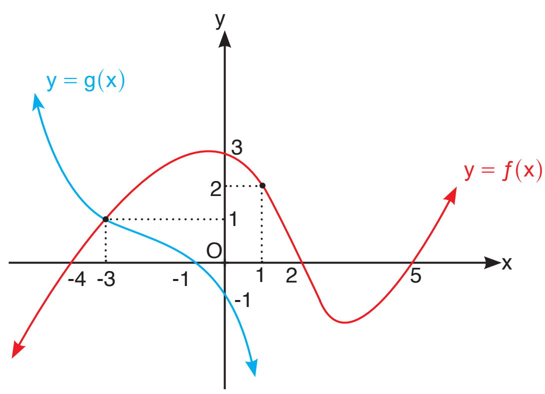
$(fog)(4) = 10$ yerine yazılırsa

$h(4) = 10 + 3 = 13$ bulunur.

ÖRNEK

Şekilde $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.

Buna göre $(fog)(-3)$ ile $(gof)(2)$ değerlerini bulalım.



ÇÖZÜM

$(fog)(-3) = f(g(-3))$

$g(-3) = 1$ dir.

$f(g(-3)) = f(1) = 2$ olur.

Dolayısıyla $(fog)(-3) = 2$ bulunur.

Aynı şekilde,

$(gof)(2) = g(f(2))$

$f(2) = 0$ dır.

$g(f(2)) = g(0) = -1$ olur.

Dolayısıyla $(gof)(2) = -1$ bulunur.

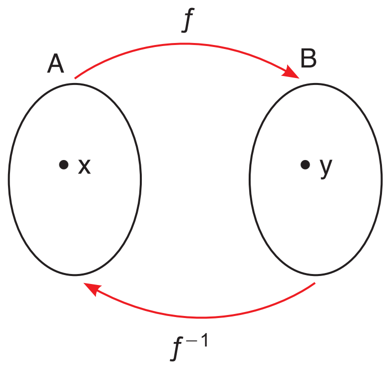
Bir Fonksiyonun Tersi

Bilgi

A ve B kümeleri boş kümeden farklı kümeler ve $f: A \longrightarrow B$, $f = \{(x, y) \mid x \in A \text{ ve } y \in B\}$ fonksiyonu bire bir ve örten olmak üzere

$f^{-1}: B \longrightarrow A$, $f^{-1} = \{(y, x) \mid y \in B \text{ ve } x \in A\}$ fonksiyonuna ***f* nin ters fonksiyonu** denir.

Her $(x, y) \in f$ ise $(y, x) \in f^{-1}$ olduğu için $y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ olur.



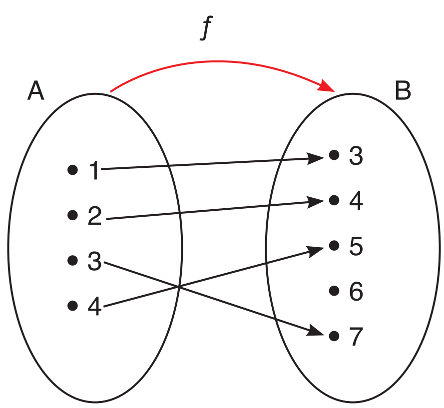
A kümesi, f fonksiyonunun tanım kümesi, aynı zamanda f^{-1} fonksiyonunun değer kümesidir.

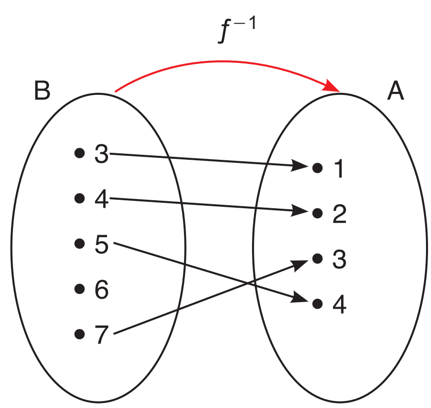
B kümesi, f fonksiyonunun değer kümesi, aynı zamanda f^{-1} fonksiyonunun tanım kümesidir.

Bilgi

Her fonksiyonun tersi fonksiyon olmayabilir. Eğer bir fonksiyon bire bir ve örten ise tersi de fonksiyondur. Ve tersi de bire bir ve örtendir. Bire bir örten olmayan fonksiyonun tersi fonksiyon değildir.

Örten fonksiyon olmayan f fonksiyonunu inceleyelim.





B kümesinde açıkta eleman kaldığından f^{-1} fonksiyon değildir.

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi veriliyor. $f: A \longrightarrow A$ olmak üzere $f = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,2), (5,1)\}$ fonksiyonunun tersini bulalım.

ÇÖZÜM

$f(1) = 3$ ise $f^{-1}(3) = 1$

$f(2) = 4$ ise $f^{-1}(4) = 2$

$f(3) = 5$ ise $f^{-1}(5) = 3$

$f(4) = 2$ ise $f^{-1}(2) = 4$

$f(5) = 1$ ise $f^{-1}(1) = 5$

Buradan $f^{-1} = \{(3,1), (4,2), (5,3), (2,4), (1,5)\}$ bulunur.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 6$ fonksiyonu veriliyor.
f^{-1} fonksiyonunun kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

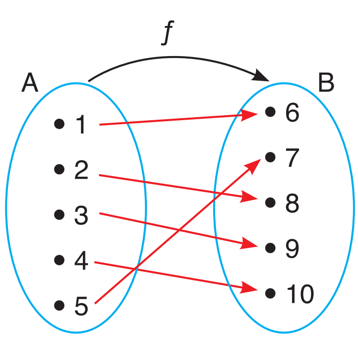
$y = f(x)$ olduğundan $y = 3x + 6$ yazılır. $f^{-1}(y) = x$ olduğundan x i yalnız bırakmalıyız.

$y = 3x + 6 \Rightarrow x = \dfrac{y-6}{3}$ olur. $f^{-1}(y) = \dfrac{y-6}{3}$ ifadesinde y yerine x yazarsak

$f^{-1}(x) = \dfrac{x-6}{3}$ bulunur.

ÖRNEK

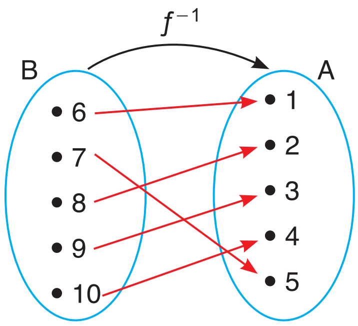
$f: A \longrightarrow B$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanıyor.



Buna göre f^{-1} fonksiyonunu bulalım.

2

ÇÖZÜM



$f^{-1} = \{(6,1),(7,5),(8,2),(9,3),(10,4)\}$ olur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 4 + a$ fonksiyonu tanımlanıyor. $f^{-1}(2) = 6$ olduğuna göre a değerini hesaplayalım.

ÇÖZÜM

$f(x) = y$ ise $f^{-1}(y) = x$ olduğundan

$f^{-1}(2) = 6$ ise $f(6) = 2$ olur. $f(x)$ fonksiyonunda bu değerler yerine yazılırsa

$f(6) = 2 \cdot 6 + 4 + a = 2$ ise $16 + a = 2 \Rightarrow a = -14$ olur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = a \cdot x^3 + b$ fonksiyonu tanımlanıyor.

$f^{-1}(2) = 0$ ve $f^{-1}(-1) = -1$

olduğuna göre $a \cdot b$ nın değerini hesaplayalım.

ÇÖZÜM

$f(x) = y$ ise $f^{-1}(y) = x$ olduğundan;

$f^{-1}(2) = 0$ ise $f(0) = 2$ olur.

$f^{-1}(-1) = -1$ ise $f(-1) = -1$ olur. Bulunan değerler fonksiyonda yerine yazılırsa

$f(0) = 2,\ f(0) = a \cdot 0^3 + b \Rightarrow b = 2$ olur.

$f(-1) = -1,\ f(-1) = a \cdot (-1)^3 + 2 = -1$ ise

$-a + 2 = -1 \Rightarrow a = 3$ olur.

$a \cdot b = 3 \cdot 2 = 6$ bulunur.

ÖRNEK

$A, B \subset \mathbb{R},\ f: A \longrightarrow B,\ f^{-1}(2x-4) = x+6$ olduğuna göre $f(4)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$y = f(x)$ ise $f^{-1}(y) = x$ olduğundan;

$f^{-1}(2x-4) = x+6$ ise

$f(x+6) = 2x-4$ olur.

Bu fonksiyonda $x = -2$ yazılırsa

$f(-2+6) = f(4) = 2 \cdot (-2) - 4 = -8$ bulunur.

Bilgi

- $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ ve $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

  $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun tersinin kuralı,

  $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$ olur.

- $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $f: \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ olmak üzere,

  $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunda x i yalnız bırakalım.

  $cx \cdot f(x) + d \cdot f(x) = ax + b \Rightarrow \dfrac{x\cancel{(c \cdot f(x) - a)}}{\cancel{(c \cdot f(x) - a)}} = \dfrac{b - d \cdot f(x)}{(c \cdot f(x) - a)}$

  $x = \dfrac{b - d \cdot f(x)}{c \cdot f(x) - a}$ olur. $y = f(x)$ olduğundan $f(x)$ yerine x ve x yerine $f^{-1}(x)$ yazılırsa

  $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx + b}{cx - a}$ bulunur.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 4$ fonksiyonunun tersinin kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

$y = f(x)$ olduğundan $y = 2x - 4$ yazılır. $f^{-1}(y) = x$ olduğundan x i yalnız bırakmalıyız.

$y = 2x - 4 \Rightarrow x = \dfrac{y+4}{2}$ olur. $f^{-1}(y) = \dfrac{y+4}{2}$ ifadesinde y yerine x yazarsak

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2}$ bulunur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 4 - 3x$ fonksiyonunun tersinin kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

$f(x) = -3x + 4$ ise $f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{-3} = \dfrac{4-x}{3}$ bulunur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{3\},\ f(x) = \dfrac{6x+2}{2x-4}$ fonksiyonunun tersinin kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

$f(x) = \dfrac{6x+2}{2x-4}$ ise $y = f(x)$ olduğundan $y = \dfrac{6x+2}{2x-4}$ yazılır.

$f^{-1}(y) = x$ olduğundan x i yalnız bırakmalıyız.

$2xy - 4y = 6x + 2$

$2xy - 6x = 4y + 2$

$x(2y - 6) = 4y + 2$

$x = \dfrac{4y+2}{2y-6}$ olur.

$f^{-1}(y) = \dfrac{4y+2}{2y-6}$ ifadesinde y yerine x yazarsak

$f^{-1}(x) = \dfrac{4x+2}{2x-6}$ bulunur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-4\},\ f(x) = \dfrac{mx+4}{n-2x}$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $m \cdot n$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Bir kesrin paydası 0 olursa o kesir tanımsız olur. Dolayısıyla fonksiyon da tanımsız olur.

$x = 3$, paydayı sıfır yaptığı için tanım kümesine dahil edilmemiştir.

$x = 3$ için $n - 6 = 0$ ise $n = 6$ olur.

$f(x) = \dfrac{mx+4}{-2x+6}$ ise $f^{-1}:\mathbb{R} - \{-4\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{3\},\ f^{-1}(x) = \dfrac{-6x+4}{-2x-m}$ olur.

Benzer şekilde $x = -4$, $f^{-1}(x)$ in paydasını sıfır yaptığı için tanım kümesine dahil edilmemiştir.

$-2 \cdot (-4) - m = 0$ ise $m = 8$ olur. Buradan $m \cdot n = 6 \cdot 8 = 48$ bulunur.

ÖRNEK

$A, B \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \longrightarrow B$,

$x = \dfrac{2f(x)+6}{3-2f(x)}$ olduğuna göre

f^{-1} fonksiyonunun kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

$y = f(x)$ ise $f^{-1}(y) = x$ olduğundan $f(x)$ yerine y, x yerine $f^{-1}(y)$ yazalım.

$f^{-1}(y) = \dfrac{2y+6}{3-2y}$ olur. Burada da y yerine x yazalım.

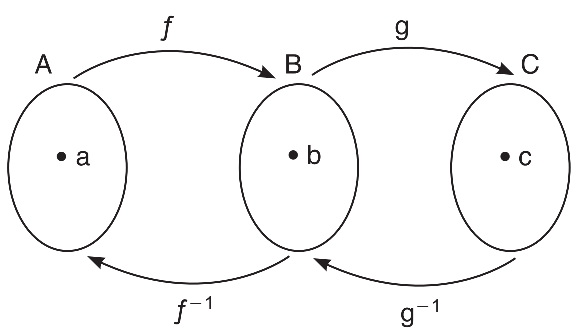
$f^{-1}(x) = \dfrac{2x+6}{3-2x}$ bulunur.

Bileşke Fonksiyonunun Tersi

Bilgi

İki fonksiyonun bileşkesinin tersinin olabilmesi için bileşkesi alınacak her iki fonksiyonun da tersinin olması gereklidir.

$A, B, C \in \mathbb{R}$, $f: A \longrightarrow B$ ve $g: B \longrightarrow C$ olmak üzere $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ olur.



$gof: A \longrightarrow C$ iken $f^{-1}og^{-1}: C \longrightarrow A$ olur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 4$ ve $g(x):\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ g(x) = 3x + 1$ fonksiyonları veriliyor.

$(f^{-1}og^{-1})$ fonksiyonunun kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

$(f^{-1}og^{-1})(x) = (gof)^{-1}(x)$ olduğundan

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x - 4) = 3(2x - 4) + 1$

$(gof)(x) = 6x - 11$ olur.

$(gof)^{-1}(x) = \dfrac{x + 11}{6}$ bulunur.

Etkinlik

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ f(x) = 4x - 4,\ \ g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ g(x) = 5x - 1$ olmak üzere

◈ (fog) fonksiyonunun kuralını bulunuz.

◈ g^{-1} fonksiyonunun kuralını bulunuz.

◈ f^{-1} fonksiyonunun kuralını bulunuz.

◈ $(fog)^{-1}$ fonksiyonunun kuralını bulunuz.

◈ $(g^{-1}of^{-1})$ fonksiyonunun kuralını bulunuz.

✷ Son iki maddede bulduğunuz fonksiyonların kurallarının eşitliği bize bileşke fonksiyonunun tersini tanımlamaz mı?

Bilgi

- f bire bir ve örten bir fonksiyon olmak üzere $(f^{-1})^{-1} = f$ olur.
- $I(x)$ birim fonksiyon, f bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere
  $(fof^{-1})(x) = I(x)$ olur.
- f ve g bire bir ve örten fonksiyonlar olmak üzere
  $(f^{-1}og)^{-1} = g^{-1}of$ olur.
- f ve g bire bir ve örten fonksiyonlar olmak üzere
  $(f^{-1}og^{-1})^{-1} = gof$ olur.
- f, g ve h fonksiyonları bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere
  $(fogoh)^{-1} = h^{-1}og^{-1}of^{-1}$ olur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 4$ ve $g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = x - 3$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre $(g^{-1} o f^{-1})$ fonksiyonunun kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

$(g^{-1} o f^{-1})(x) = (f o g)^{-1}(x)$ olduğundan önce $f o g$ fonksiyonunun kuralını bulalım.

$(f o g)(x) = f(g(x))$

$f(x - 3) = 2(x - 3) + 4$

$(f o g)(x) = 2x - 2$ olur. Buradan $(f o g)(x)$ fonksiyonunun tersi alınırsa

$(g^{-1} o f^{-1})(x) = \dfrac{x + 2}{2}$ bulunur.

ÖRNEK

$A, B, C \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \longrightarrow B,\ g: B \longrightarrow C$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar için

$f(x) = 2x + 4$ ve $(g o f)(x) = 12x + 4$ ise g fonksiyonunun kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

$f o f^{-1} = \mathrm{I}$ ve bileşke işleminin birleşme özelliği olduğundan

$(g o f) o f^{-1}(x) = g o \underbrace{(f o f^{-1})}_{\mathrm{I}}(x) = g(x)$ olur.

$f^{-1}(x) = \dfrac{x - 4}{2}$ olur. Buradan

$g(x) = (g o f) o f^{-1}(x) = (12x + 4) o \left(\dfrac{x - 4}{2}\right) = 12 \cdot \left(\dfrac{x - 4}{2}\right) + 4 = 6x - 20$ bulunur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, h:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; f, g, h fonksiyonları için $(g^{-1} o f^{-1})(x) = 2x + 4$ ve

$h(x) = x^2 - x$ veriliyor. $(f o g o h)$ fonksiyonunun kuralını bulalım.

ÇÖZÜM

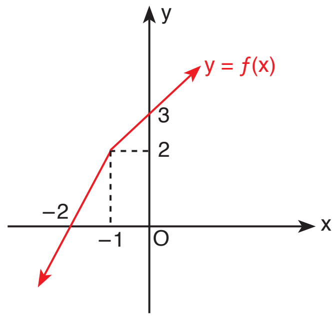
$(g^{-1} o f^{-1})^{-1}(x) = (f o g)(x)$ olduğundan

$(f o g)(x) = \dfrac{x - 4}{2}$ olur.

$(f o g o h)(x) = ((f o g) o h)(x) = \left(\dfrac{x - 4}{2}\right) o (x^2 - x)$

$(f o g o h)(x) = \dfrac{x^2 - x - 4}{2}$ bulunur.

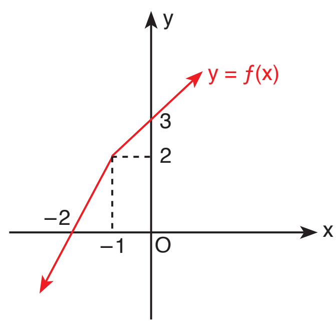
ÖRNEK



Yukarıda $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f(-2)$, $f(-1)$ ve $f^{-1}(3)$ değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

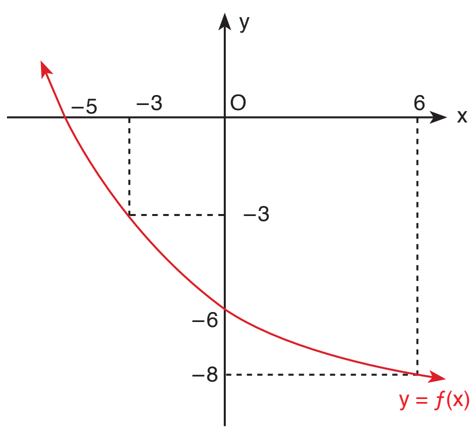


$(-2,0)$ noktası grafiğe ait olduğundan $f(-2) = 0$

$(-1,2)$ noktası grafiğe ait olduğundan $f(-1) = 2$

$(0,3)$ noktası grafiğe ait olduğundan $f^{-1}(3) = 0$ olur.

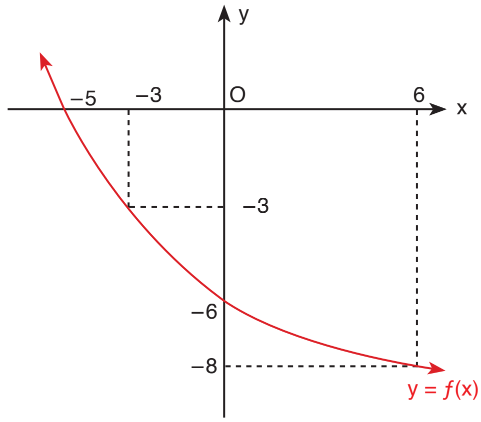
ÖRNEK



Yukarıda $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\dfrac{f(6)+f^{-1}(0)}{f^{-1}(-3)+f(-5)}$ ifadesinin değerini bulalım.

ÇÖZÜM



Grafiğe ait bazı noktalar $(6,-8)$, $(-5,0)$ ve $(-3,-3)$ tür.

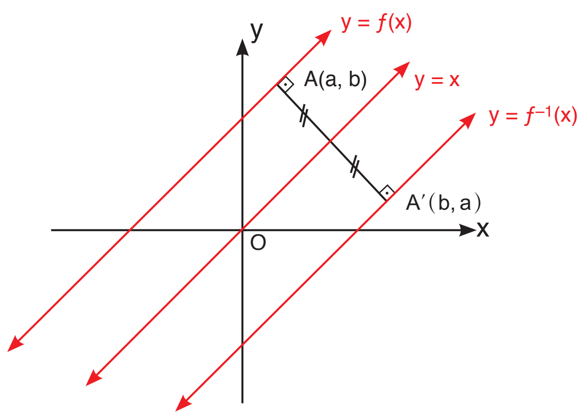
Buradan,

$f(6)=-8$, $f(-5)=0$, $f^{-1}(0)=-5$ ve $f^{-1}(-3)=-3$ olur.

$\dfrac{f(6)+f^{-1}(0)}{f^{-1}(-3)+f(-5)}=\dfrac{-8-5}{-3+0}=\dfrac{-13}{-3}=\dfrac{13}{3}$ bulunur.

Bilgi

Birebir ve örten doğrusal bir fonksiyonun grafiği ile tersinin grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktir. Yani $y = f(x)$ ve $y = f^{-1}(x)$ in grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.



$A(a,b)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan $A'(b,a)$ noktası, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerindedir.

Etkinlik

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x$ fonksiyonu veriliyor.

◈ $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

◈ $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

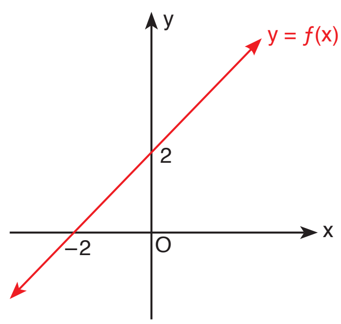
◈ $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

✷ $f(x)$ ve $f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetrik midir? Açıklayınız.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x + 2$ fonksiyonu veriliyor. f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

ÇÖZÜM

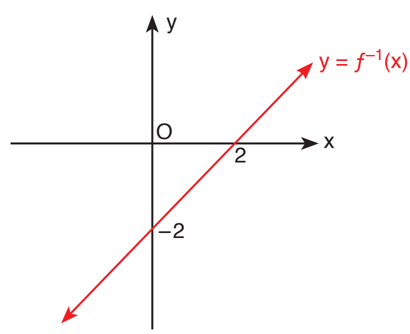


$f(x) = x + 2$ fonksiyonunun tersi $f^{-1} = x - 2$ olur.

$f(x) = x + 2$ fonksiyonunun grafiği için

x = 0 için y = 2

y = 0 için x = –2 bulunur.



$f^{-1} = x - 2$ fonksiyonunun grafiği için

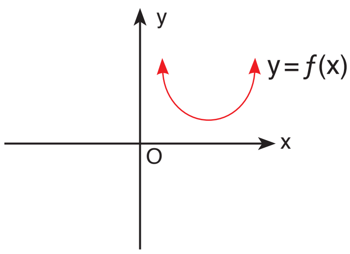
x = 0 için y = –2

y = 0 için x = 2 bulunur.

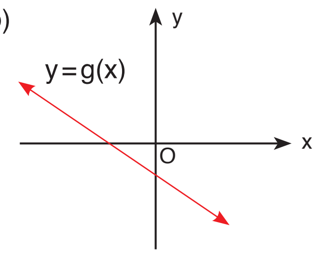
Alıştırmalar 2-2

1) Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangileri bire birdir? Bulunuz.

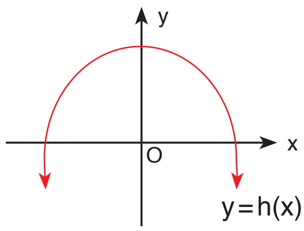
a)



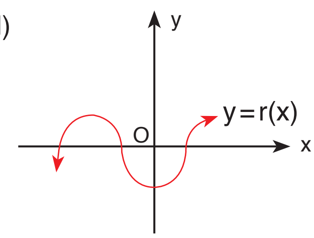
b)



c)



d)



2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x-3}{2}$,

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = 2x + 4$,

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ h(x) = 4x - 1$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre fog, foh, hog^{-1} fonksiyonlarının kuralını bulunuz.

3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ bire bir ve örten fonksiyonu için $f(x)$ ve $f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının grafiği .... doğrusuna simetriktir.

4) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 4$ ve $A, B \subset R$, $fog : A \longrightarrow B$ $(fog)(x) = 4x - 3$ ise $f(5)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

5) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{2} - 3$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

6) $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{3\},\ f(x) = \dfrac{3x+4}{x-2}$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

7) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4$ fonksiyonu için $(fog)(x) = I(x)$ ise $g(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3x$ B) $3x + 4$ C) $\dfrac{x+4}{4}$ D) $\dfrac{x+4}{3}$ E) $2x + 1$

8) $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{4\},\ f(x) = \dfrac{ax+1}{2x+b}$ şeklinde tanımlı fonksiyon için $a \cdot b$ değerini bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

1) $f=\{(1,2),(2,3),(3,1),(4,3)\}$ fonksiyonu veriliyor. f nin görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1,3\}$ B) $\{2,3\}$ C) $\{1,2,3,4\}$ D) $\{1,2,3\}$ E) $\{1,2\}$

2) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8\}$ olmak üzere aşağıdakilerden hangisi A dan B ye bir fonksiyondur?

A) $\{(1,6),(2,8)\}$

B) $\{(3,7),(4,8),(5,6)\}$

C) $\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,8)\}$

D) $\{(1,7),(2,6),(3,7),(4,7),(3,8)\}$

E) $\{(1,6),(2,6),(3,7),(4,8),(5,8),(2,7)\}$

3) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=4x+5$ olduğuna göre $f(5)+f(0)$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

4) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=(a-2)x+b-4$ fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre a + b nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 8 C) 10 D) 13 E) 17

5) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}-\{2\}, f(x)=\dfrac{3x+t}{4x-8}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise t nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A)–6 B)–5 C)–4 D)–3 E)–2

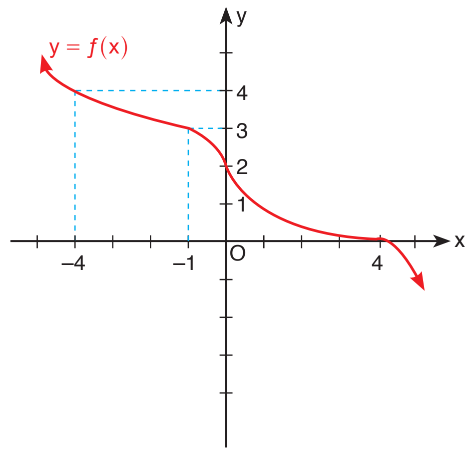
6) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x+5)=7x-2$ olduğuna göre $f(8)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 14 B) 17 C) 18 D) 19 E) 22

7) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=|2x-3|+|x+1|$ ise $f(-3)+f(0)$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

8) Yanda $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $\dfrac{f(-4)-f(4)}{f^{-1}(2)+f^{-1}(3)}$ kaçtır?



A) 2 B) –4 C) 3 D) 0 E) 4

9) $A = \{a, b, c, d\}$ ve $f: A \longrightarrow A$ olmak üzere aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi bire bir fonksiyondur?

A) $f:\{(a,b),(b,a),(c,a),(d,c)\}$

B) $f:\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$

C) $f:\{(a,d),(b,d),(c,d),(d,d)\}$

D) $f:\{(a,a),(b,a),(c,d),(d,b)\}$

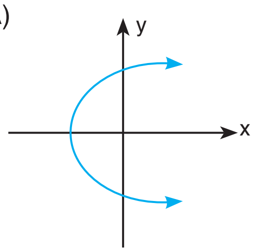
E) $f:\{(a,d),(b,d),(c,a),(d,b)\}$

10) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ fonksiyonunda $f(1)+f(2)$ kaçtır?

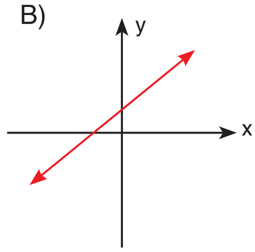
A) –3 B) 0 C) 1 D) 3 E) 9

11) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$nin grafiği aşağıdakilerden hangisinde doğru verilmiştir?

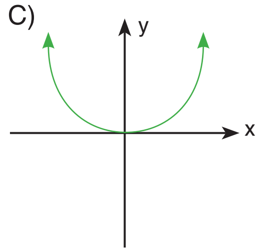
A)



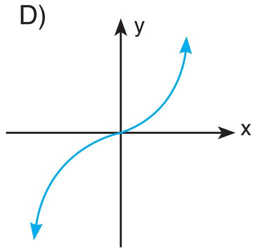
B)



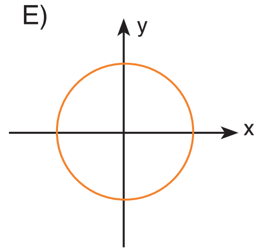
C)



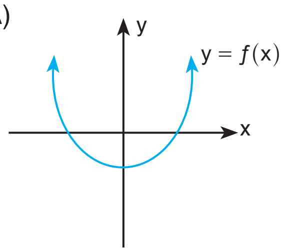
D)

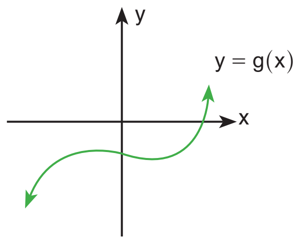


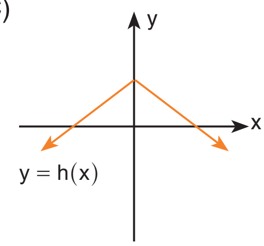
E)

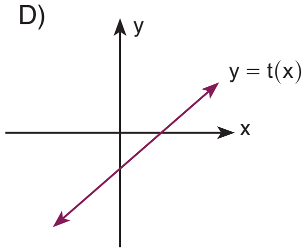


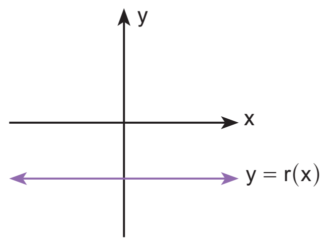
12) Aşağıdaki fonksiyon grafiklerinden hangisi bire bir fonksiyondur?

A)


B)


C)


D)


E)


13) $A = \{x, y, z, t\}$ ve $f: A \longrightarrow A$ olmak üzere aşağıda verilen fonksiyonlardan hangisi örten fonksiyondur?

A) $f: \{(x,x),(y,z),(z,x),(t,z)\}$

B) $f: \{(x,y),(y,z),(z,t),(t,y)\}$

C) $f: \{(x,y),(y,y),(z,y),(t,y)\}$

D) $f: \{(x,x),(y,x),(z,z),(t,z)\}$

E) $f: \{(x,t),(y,z),(z,x),(t,y)\}$

14) $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{5,8,a,b\}$ ve $f: A \longrightarrow B$ olmak üzere $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonu bire bir ve örtendir. a + b kaçtır?

A) 25 B) 27 C) 29 D) 30 E) 32

15) $f = \{(-1,3),(2,4),(3,7),(5,1)\}$ ve $g = \{(1,2),(2,3),(4,-1),(5,2)\}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $(f + g)(1) = 5$

B) $(f \cdot g)(2) = 6$

C) $\left(\frac{f}{g}\right)(5) = 2$

D) $(f - g)(3) = 5$

E) $(2f - 3g)(5) = -4$

16) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = (x - 3)^2$ veriliyor. Buna göre $(f \cdot g)(2)$ nin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 10

17) $f = \{(a,2),(2,3),(4,5)\}$, $g = \{(a,4),(2,a),(4,-2)\}$ ve $(f \cdot g)(a) = (f + g)(2)$ ise a aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 3x + 5$ ve $g(x) = 2x - 1$ fonksiyonları için $(gof)^{-1}(m) = 2$ ise m kaçtır?

A) 11 B) 16 C) 21 D) 26 E) 31

19) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(3x - 1) = 5x + 2$ ve $g(x) = x - 3$ fonksiyonları için $(gof^{-1})^{-1}(-1)$ in değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

20) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $g(x) = 2x + 4$ ve $(fog)(x) = \dfrac{x+3}{2}$ ise $f(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\dfrac{x-2}{5}$ B) $\dfrac{x-3}{4}$ C) $\dfrac{x+2}{4}$ D) $\dfrac{x-1}{3}$ E) $\dfrac{x+1}{4}$

21) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x - 3) = 2x - 5$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f^{-1}(3x + 1)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\dfrac{3x}{2}$ B) $2x + 1$ C) $3x - 1$ D) $3x$ E) $6x$

22) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $(fof)(x) = 9x + 16$ ise $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\dfrac{x+2}{9}$ B) $\dfrac{x-2}{9}$ C) $\dfrac{x+4}{3}$ D) $\dfrac{x-4}{3}$ E) $\dfrac{x+2}{4}$

23) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $(fog)^{-1}(x) = 4x - 3$ ve $f(x) = 2x - 5$ olduğuna göre $g(-7)$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{9}{2}$ E) $\frac{15}{2}$

24) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$ doğrusal bir fonksiyon, $f^{-1}(7) = 4,\ f^{-1}(1) = 2$ olduğuna göre $a \cdot b$ kaçtır?

A) –15 B) –12 C) –9 D) –3 E) –1

25) $f:A \longrightarrow B,\ f(x) = -3x + 2$ şeklinde tanımlı fonksiyon için $A = [2, 5)$ ise $f(A)$ kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(-15, 13)$ B) $(-13, -5]$ C) $(-13, -4]$ D) $[-4, 5)$ E) $[1, 13)$

26) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{ax + b}{c}$ fonksiyonu için $(fog)(x) = x$ ise $g(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-x + a$ B) $\dfrac{cx + b}{a}$ C) $\dfrac{cx - b}{a}$ D) $\dfrac{bx + a}{c}$ E) $\dfrac{bx - a}{c}$

27) $f:\mathbb{R} - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{b\}$ olmak üzere $f(x) = \dfrac{9x - 4}{3x + 12}$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $a \cdot b$ kaçtır?

A) -18 B) -12 C) -9 D) -6 E) -3

28) $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{1\}$ ise $(fof)(x)$ in tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

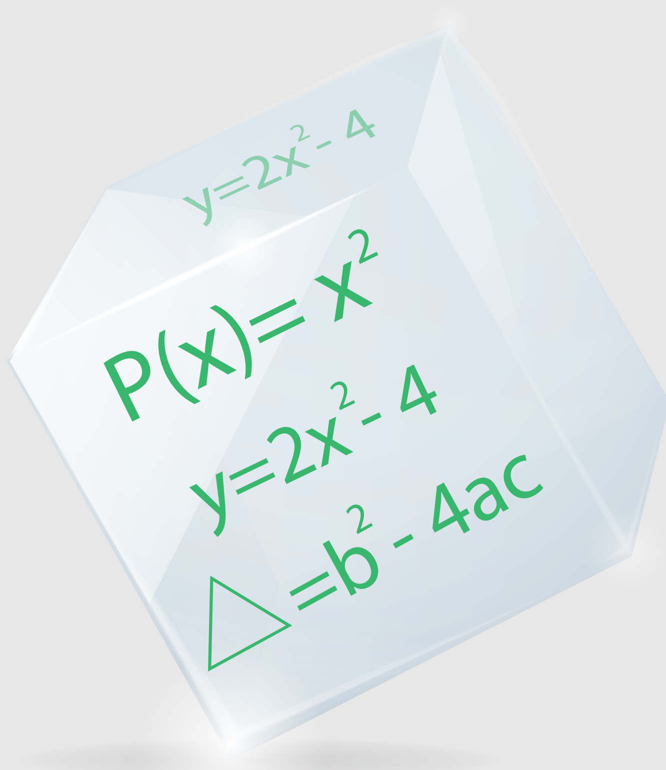
A) $\mathbb{R} - \{2\}$ B) $\mathbb{R} - \{-3\}$ C) $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ D) $\mathbb{R} - \{1\}$ E) $\mathbb{R} - \{3\}$

29) $f:\mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 1}$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(2x + 1)$ fonksiyonunun $f(x)$ cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{f(x) - 2}{f(x) + 3}$ B) $\dfrac{2f(x) + 1}{2f(x) - 1}$ C) $\dfrac{3f(x) - 1}{f(x) + 1}$ D) $\dfrac{f(x) + 1}{2}$ E) $\dfrac{3f(x) + 1}{2f(x)}$

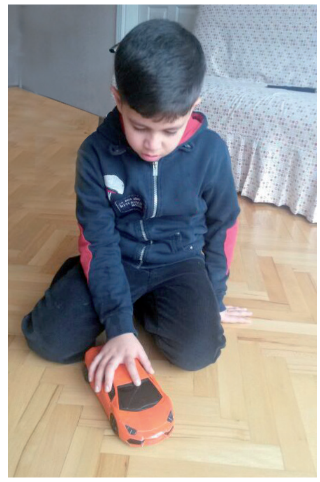
3

POLİNOMLAR VE İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER



3. POLİNOMLAR

3.1. Polinom Kavramı ve Polinomlarla İşlemler



Bilimde ve matematik alanında polinomlarla sıkça karşılaşırız. Polinomlar; ekonomide, kimyada, fizikte ve sosyal bilimlerde problemlerin çözülmesi için kullanılır. Hesap makinelerinin hesaplayamayacağı çok büyük üslü fonksiyonların belli bir fonksiyona bölümünden kalanı, polinomlar yardımıyla hesaplayabiliriz.

Polinom sözlük anlamıyla "çok terimli" anlamına gelmektedir.

Oyuncak arabasıyla oynayan bir çocuğun arabasını çekip bıraktıktan t saniye sonra arabanın aldığı yol, $t^2 - 2t + 3$ metredir.

Arabanın çekilip bırakıldıktan 2 saniye sonra aldığı yolu bulunuz.

Verilen bağıntıyı daha önce gördüğünüz cebirsel ifadeler ve fonksiyonlarla ilişkilendiriniz.

Bilgi

x değişken, $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots a_{n-1}, a_n$ gerçek sayılar ve n doğal sayı olmak üzere

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

ifadesine **gerçek katsayılı ve bir değişkenli polinom (çok terimli)** denir ve $P(x), Q(x), R(x)$ gibi ifadelerle gösterilir.

Bu polinomda;

$a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_{n-1} x^{n-1}, a_n x^n$ ifadelerine **polinomun terimleri**,

$a_0, a_1\ a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ ifadelerine **polinomun katsayıları**,

a_n sayısına **polinomun baş katsayısı,**

a_0 sayısına da **polinomun sabit terimi** denir. (x in derecesi 0 olan terim)

$P(x)$ polinomunu oluşturan terimlerden derecesi en büyük olanın derecesine, **polinomun derecesi** denir ve **der**$[\mathbf{P}(\mathbf{x})]$ ile gösterilir.

Polinomun derecesi $\text{der}[P(x)] = 3$

$$P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 9 \longrightarrow \text{Sabit terim}$$

En büyük dereceli terim

Polinomun baş katsayısı

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadelerin polinom olup olmadığını belirleyelim. Polinom olan ifadelerin ise terim sayısını, derecesini, baş katsayısını ve sabit terimini bulalım.

a) $P(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{7}x + \sqrt{3}$ **b)** $Q(x) = 3x^4 - \frac{1}{x} + 2$ **c)** $R(x) = 4x^3 - \sqrt{x} + 3$

ç) $S(x) = \sqrt{3}x^2 - x + \sqrt[3]{2}x^4 - 1$ **d)** $T(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ÇÖZÜM

a) $P(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{7}x + \sqrt{3}$

$P(x)$ bir polinomdur. Terim sayısı 4, der $[P(x)] = 3$, baş katsayısı 2 ve sabit terimi $\sqrt{3}$ tür.

b) $Q(x) = 3x^4 - \frac{1}{x} + 2$ ifadesi polinom değildir. Çünkü $\frac{1}{x} = x^{-1}$ ve $-1 \notin \mathbb{N}$ dir.

c) $R(x) = 4x^3 - \sqrt{x} + 3$ ifadesi polinom değildir. Çünkü $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ve $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ dir.

ç) $S(x) = \sqrt{3}x^2 - x + \sqrt[3]{2}x^4 - 1$ ifadesi polinomdur.

Terim sayısı 4, der $[S(x)] = 4$, baş katsayısı $\sqrt[3]{2}$ ve sabit terimi -1 dir.

d) $T(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ bir polinomdur.

der $[T(x)] = 0$, sabit terimi ve baş katsayısı $\frac{1}{\sqrt{2}}$ olan sabit polinomdur.

ÖRNEK

$P(x) = 2\sqrt{3}x^4 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{x}{5} + \sqrt{2}$ polinomunun derecesini, baş katsayısını, derecesi bir ve beş olan terimlerinin katsayılarını bulalım.

ÇÖZÜM

der$[P(x)] = 6$, baş katsayı $\frac{-1}{3}$,

Derecesi 1 olan terimin katsayısı $\frac{1}{5}$,

Derecesi 5 olan terimin katsayısı 0(sıfır) dır.

ÖRNEK

$P(x) = 5x^2 - 3x^{\frac{15}{m-1}} + 4$ ifadesinin polinom olabilmesi için, m nin alabileceği değerler toplamını bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x)$ in polinom olabilmesi için $\frac{15}{m-1} \in \mathbb{N}$ olmalıdır.

O hâlde m – 1 sayısı, 15 sayısının pozitif tam sayı bölenleri olmalıdır. 15 in pozitif tam sayı bölenleri 1, 3, 5 ve 15 olduğundan

$m - 1 = 1 \Rightarrow m = 2,\qquad m - 1 = 5 \Rightarrow m = 6$

$m - 1 = 3 \Rightarrow m = 4,\qquad m - 1 = 15 \Rightarrow m = 16$ olur.

Bu durumda, m nin alabileceği değerler toplamı, $2 + 4 + 6 + 16 = 28$ bulunur.

Etkinlik

Fonksiyon	Polinom mu? Evet / Hayır	Polinomun derecesi	Baş katsayı	Sabit terim
$f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$	Evet	3	5	1
$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{x}$				
$f(x) = 3x^2 + 2x + \sqrt{5}$				
$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}x^4 + \sqrt{3}x$				
$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{5}$				
$f(x) = 2\sqrt{x} - 1$				
$f(x) = 4$				

✷ Hangi fonksiyonlar polinom değildir? Neden?

✷ Polinomların derecelerini neye göre belirlediniz?

Dikkat

Bir polinomun gerçek sayı katsayılı, bir değişkenli ve derecelerinin doğal sayı olması gerektiğine dikkat ediniz.

ÖRNEK

$P(x) = (2n + 3)x^{n-1} + 5x^2 - 9$ polinomunun derecesi 3 olduğuna göre baş katsayısını bulalım.

ÇÖZÜM

Derecesi 3 ise $n - 1 = 3$ olmalıdır. Buradan $n = 4$ olur.

Baş katsayısı $2n + 3 = 2 \cdot 4 + 3 = 11$ olur.

Bilgi

Sabit terimi dışında bütün katsayıları 0 (sıfır) olan polinoma **sabit polinom** denir. Sabit polinomun derecesi 0 (sıfır) dır.

Sabit terimi dâhil bütün katsayıları 0(sıfır) olan polinoma **sıfır polinom** denir. Sıfır polinomun derecesinden söz edilemez.

ÖRNEK

$P(x) = (a + 2)x^2 + (b - 1)x + 8$ polinomu sabit polinom ise a ve b değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

Sabit polinom olması için sabit terimi hariç bütün katsayıları 0 (sıfır) olacağından

$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$ ve $b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = (3a - c)x^2 + (2b + a)x + 2c - 6$ polinomu sıfır polinom ise $a \cdot b \cdot c$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Sıfır polinom olması için sabit terimi dâhil bütün katsayıları 0 (sıfır) olacağından

$2c - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 3$

$3a - c = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

$2b + a = 0 \quad \Rightarrow \quad 2b + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{-1}{2}$ ve buradan

$a \cdot b \cdot c = 1 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot 3 = \frac{-3}{2}$ bulunur.

Etkinlik

Aşağıdaki tablolarda boş bırakılan yerleri örneklere uygun biçimde doldurunuz.

$P(x) = x^2 + 3x - 2$ ise	$Q(x) = 5$ ise	$R(x) = 0$ ise
$P(-1) = (-1)^2 + 3(-1) - 2 = -4$	$Q(-1) = 5$	$R(-1) = 0$
$P(-2) =$	$Q(-2) =$................	$R(-2) =$ ....
$P(3) =$	$Q(3) =$................	$R(3) =$ ....
$P(0) =$	$Q(0) =$................	$R(0) =$ ....

✷ x değerleri değiştiği hâlde değerleri değişmeyen polinomlar hangileridir? Bu polinomların değerlerinin değişmemesi neye bağlıdır?

ÖRNEK

$P(x) = (a-4)x^3 + (b+3)x + a \cdot b + 2$ ifadesi sabit polinom ise $P(5)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$ ve $b + 3 = 0 \Rightarrow b = -3$ olur. Bu değerleri yerine yazdığımızda sabit polinom

$P(x) = 4 \cdot (-3) + 2 \Rightarrow P(x) = -10$ olur ve buradan $P(5) = -10$ bulunur.

Bilgi

$P(x)$ verildiğinde $P[Q(x)]$ ifadesini elde etmek için $P(x)$ polinomunda x lerin yerine $Q(x)$ yazılır.

ÖRNEK

$P(x) = 3x^2 - x + 1$ olduğuna göre $P(2)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunda x yerine 2 yazarsak

$P(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 12 - 1 = 11$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x+1)+Q(x-1)=2x^2+1$ olmak üzere $P(4)=5$ ise $Q(2)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$x+1=4 \Rightarrow x=3$ olduğundan

$P(4)$ ü elde etmek için x lerin yerine 3 yazalım.

$P(3+1)+Q(3-1)=2\cdot 3^2+1$

$P(4)+Q(2)=19$

$5+Q(2)=19 \Rightarrow Q(2)=14$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x)=x^2-3x+2$ ise $P(x+1)$ i bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunda x lerin yerine $x+1$ yazalım.

$P(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+2$

$=x^2+2x+1-3x-3+2 \quad \Rightarrow \quad P(x+1)=x^2-x$ bulunur.

İki Polinomun Eşitliği

Bilgi

Dereceleri aynı ve aynı dereceli terimlerinin katsayıları eşit olan en az iki polinoma **eşit polinomlar** denir. Bu tanıma göre

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_o$

$Q(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_o$ polinomları için

$P(x)=Q(x) \Leftrightarrow a_n=b_n,\ \ldots,\ a_2=b_2,\ a_1=b_1,\ a_0=b_0$ olur.

ÖRNEK

$P(x) = (a - 2)x^2 + 3x - 5$ ve $Q(x) = 2x^2 + (b - 5)x + 2 - c$ polinomları için

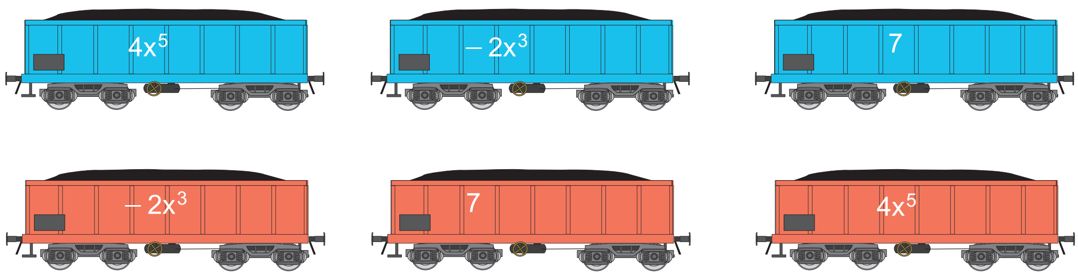
$P(x) = Q(x)$ ise $a + b + c$ işleminin sonucunu bulalım.

ÇÖZÜM

$a - 2 = 2$ $\quad$ $b - 5 = 3$ $\quad$ $2 - c = -5$

$a = 4$ $\quad$ $b = 8$ $\quad$ $c = 7$ olduğundan $a + b + c = 4 + 8 + 7 = 19$ bulunur.

Etkinlik



◈ Yukarıdaki mavi renkli vagonların üzerinde yazan terimleri toplayarak $M(x)$ polinomunu, kırmızı renkli vagonların üzerinde yazan terimleri toplayarak $K(x)$ polinomunu yazınız.

✷ $M(x)$ ve $K(x)$ polinomlarını karşılaştırdığınızda ne söyleyebilirsiniz?

✷ Bu iki polinom birbirinden farklı mıdır?

ÖRNEK

$P(x) = (a + 2)x^3 + bx^2 + (c - b)x + 3$ ve

$Q(x) = 4x^2 + 3x + d$ polinomları için $P(x) = Q(x)$ ise $ab - cd$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$a + 2 = 0$ $\quad$ $b = 4$ $\quad$ $c - b = 3$ $\quad$ $d = 3$

$a = -2$ $\quad$ $c - 4 = 3 \Rightarrow c = 7$

$$\begin{aligned} ab - cd &= -2 \cdot 4 - 7 \cdot 3 \\ &= -8 - 21 \\ &= -29 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi

Bir P(x) polinomunda, polinomun katsayılarının toplamını bulmak için P(1) değeri, polinomun sabit terimini bulmak için P(0) değeri bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = (3x - 4)^5 + ax + 2$ polinomunun katsayılar toplamı 8 olduğuna göre a değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(1) = 8$ olacağından

$P(1) = (3 \cdot 1 - 4)^5 + a \cdot 1 + 2 = 8$

$(-1)^5 + a + 2 = 8$

$a + 1 = 8 \Rightarrow a = 7$ bulunur.

Etkinlik

$P(x) = 2x^2 + 3x + 4$ polinomu için aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

P(0)	P(1)	Polinomun Sabit Terimi	Polinomun Katsayılar Toplamı

◈ P(0) değeri ile polinomun sabit terimini karşılaştırınız.

◈ P(1) değeri ile polinomun katsayılar toplamını karşılaştırınız.

✷ x in hangi değeri için polinomun katsayılar toplamı bulunur?

✷ x in hangi değeri için polinomun sabit terimi bulunur?

ÖRNEK

$P(x) = (2x^2 + 4x - a)^4$ polinomunun sabit terimi 81 ise a nın pozitif değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(0) = 81$ olacağından

$P(0) = (2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - a)^4 = 81$

$(-a)^4 = 81 \Rightarrow a^4 = 81 \Rightarrow a^4 = 3^4$ ve $a^4 = (-3)^4$

a nın pozitif değeri ise a = 3 olur.

Bilgi

$P[Q(x)]$ verildiğinde $P(x)$ ifadesini elde etmek için $P[Q(x)]$ ifadesinde x lerin yerine $Q^{-1}(x)$ yazarsak $P[Q(Q^{-1}(x))] = P(x)$ bulunur.

ÖRNEK

$P(3x-1) = 9x^2 - 12x + 3$ ise $P(x)$ i bulalım.

ÇÖZÜM

P(x) i elde etmek için $P(3x-1)$ de x yerine $3x-1$ in tersini yazmalıyız.

$$P\left(3\cdot\frac{x+1}{3}-1\right) = P(x) = 9\cdot\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 - 12\cdot\left(\frac{x+1}{3}\right)+3$$

$$= (x+1)^2 - 4(x+1) + 3$$

$$= x^2 + 2x + \cancel{1} - 4x - \cancel{4} + \cancel{3} \Rightarrow P(x) = x^2 - 2x \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$P(x+2) = x^2 + x - 4$ olduğuna göre $P(1)$, $P(x-1)$ ve $P(x)$ değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

i) $P(1)$ i elde etmek için $x+2 = 1 \Rightarrow x = -1$ buluruz ve x yerine -1 yazmalıyız.

$P(-1+2) = (-1)^2 - 1 - 4$

$P(1) = \cancel{1} - \cancel{1} - 4 \Rightarrow P(1) = -4$ bulunur.

ii) $P(x-1)$ i elde etmek için $P(x+2)$ de x yerine $x-3$ yazmalıyız.

$P(x-3+2) = (x-3)^2 + (x-3) - 4$

$P(x-1) = x^2 - 6x + 9 + x - 3 - 4 \Rightarrow P(x-1) = x^2 - 5x + 2$ bulunur.

iii) $P(x)$ i elde etmek için $P(x+2)$ de x yerine $x+2$ nin tersini yazmalıyız.

$P(x-2+2) = (x-2)^2 + x - 2 - 4$

$P(x) = x^2 - 4x + 4 + x - 6 \Rightarrow P(x) = x^2 - 3x - 2$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = (mx+n)^5$ polinomunun katsayılarının toplamı –32 ve sabit terimi 32 ise $m \cdot n$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(1) = -32 \Rightarrow P(1) = (m \cdot 1 + n)^5 = -32 = (-2)^5 \Rightarrow m + n = -2$ dir.

$P(0) = 32 \Rightarrow P(0) = (m \cdot 0 + n)^5 = 32 = 2^5 \Rightarrow n^5 = 2^5 \Rightarrow n = 2$ ve

$m + n = -2 \Rightarrow m + 2 = -2 \Rightarrow m = -4$ olur.

O hâlde $m \cdot n = -4 \cdot 2 = -8$ bulunur.

Alıştırmalar 3-1

1) Aşağıdaki ifadelerin polinom olup olmadıklarını araştırınız. Polinom olanların derecelerini, baş katsayılarını ve sabit terimlerini bulunuz.

a) $P(x) = -2x^4 + 5x^5 - x^2 + 1$

b) $Q(x) = \sqrt{3}x^2 - \frac{3}{4}x + 1$

c) $R(x) = \frac{3}{x^2+1}$

ç) $T(x) = \sqrt{2x} + 3x^2 - 1$

2) $P(x) = 5x^3 - 4x^2 + 2x - 3$ polinomu veriliyor. Aşağıdaki cümleler doğru ise yay ayraç içine "D", yanlış ise "Y" yazınız.

(   ) $P(x)$ in baş katsayısı 5 tir.

(   ) Katsayılar toplamı 0 dır.

(   ) Sabit terimi 3 tür.

(   ) $P(x)$, 3. dereceden bir polinomdur.

(   ) $P(-1) = -10$ dur.

3) $P(x) = -3x^2 + 2x - 1$ polinomu için 1. gruptaki değerleri 2. gruptakilerle eşleştiriniz.

I. Grup	II. Grup
a) $P(0)$ ( )	**1)** -5
b) $P(-1)$ ( )	**2)** $-3x^2 - 4x - 2$
c) $P(1)$ ( )	**3)** -1
ç) $P(2)$ ( )	**4)** -9
d) $P(x+1)$ ( )	**5)** $-48x^2 + 8x - 1$
e) $P(4x)$ ( )	**6)** -6
	7) -2

4) $P(x) = 2x^{\frac{12}{m+1}} + 3x^{m-4} + 2$ ifadesi bir polinom olduğuna göre m nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

5) $P(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2$ polinomunun katsayılar toplamını bulunuz.

6) $P(x) = (x^2 + x)^{10}$ polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayılar toplamını bulunuz.

7) $P(x) - P(x+1) = x^2 + x - 1$ olmak üzere $P(x)$ in sabit terimi 2 ise katsayılar toplamı kaçtır?

8) $(x^2 - 2)a + (x+1)b + c = x^2 + x + 3$ eşitliğini sağlayan $a + b + c$ işleminin sonucunu bulunuz.

9) $P(x-2) = x^3 - 5x + c$ polinomu veriliyor. $P(x)$ polinomunun sabit terimi 4 ise $P(x)$ in katsayılar toplamı kaçtır?

10) $P(x) = (2a + b)x^4 + 5x^2 - c$ ve $Q(x) = 3x^4 + (a - 3b)x^2 + a \cdot b$ polinomları birbirine eşit ise $\frac{a+b}{c}$ değerini bulunuz.

11) $P(x) = (x+1) \cdot Q(x-1) + 6x + 4$ veriliyor. $Q(1) = 2$ ise $P(2)$ kaçtır?

12) $P(2x+1) = 5x^3 + 4x^2 + 6x + 9$ ise $P(-1)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

13) $P(2x-1) = x^3 + ax^2 - x + 4$ polinomu için $P(3) = 2$ ise a kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

14) $P(x) = (3m-9)x^2 + (n+2)x - m \cdot n + 3$ sabit polinom ise $P(100)$ kaçtır?

A) –2 B) –3 C) –9 D) 4 E) 9

15) $P(x) = x^2 + 2ax + 5a$ ve $Q(x) = (b+2)x^3 + x^2 + (c+1)x + 20$ polinomları için $P(x) = Q(x)$ olduğuna göre $a + b + c$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 9 C) 12 D) 13 E) 15

16) $P(x) - P(x+2) = x - 2$ olmak üzere $P(x)$ in katsayılar toplamı 5 ise $P(x+7)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Polinomlar Kümesinde Toplama ve Çıkarma İşlemi

Bilgi

Polinomlarda toplama işlemi yapılırken aynı dereceli terimlerin katsayıları toplanır, bu toplam aynı dereceli terime katsayı olarak yazılır.

Polinomlarda çıkarma işlemi yapılırken aynı dereceli terimlerin katsayılarının farkı alınır, bu fark aynı dereceli terime katsayı olarak yazılır.

ÖRNEK

$P(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 3$ ve $Q(x) = 7x^2 + 9x + 5$ ise $P(x) + Q(x)$ işleminin sonucunu bulalım.

ÇÖZÜM

$$P(x) + Q(x) = (5+0)x^3 + (4+7)x^2 + (-7+9)x + (3+5)$$
$$= 5x^3 + 11x^2 + 2x + 8 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$P(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 3$ ve $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + 4$ ise $P(x) - Q(x)$ işleminin sonucunu bulalım.

ÇÖZÜM

$$P(x) - Q(x) = (5-2)x^3 + (4-(-1))x^2 + (-7-2)x + (3-4)$$
$$= 3x^3 + 5x^2 - 9x - 1 \text{ olur.}$$

Etkinlik

Tablodaki boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz.

Katsayılar / Polinomlar	x^3 lü terimin katsayısı	x^2 li terimin katsayısı	x li terimin katsayısı	Sabit terim
$P(x) = -3x^2 + x - 7$		–3		
$Q(x) = x^3 + 2x^2 + 4x$				0
Aynı dereceli terimlerin katsayıları toplamı				

◈ Aşağıdaki $P(x) + Q(x)$ polinomundaki boş bırakılan yerleri tablodan yararlanarak doldurunuz.

$P(x) + Q(x) =$ ....$x^3 + (-1)x^2 +$ ....$x +$ ....

✷ İki veya daha fazla polinomun toplamı yine bir polinom mudur? Tartışınız.

◈ $Q(x) + P(x)$ polinomunu bulunuz.

✷ $P(x) + Q(x)$ ile $Q(x) + P(x)$ polinomları eşit midir? Polinomlarda toplama işleminin değişme özelliği var mıdır?

Bilgi

Dereceleri farklı olan iki polinomun toplamının ve farkının derecesi, derecesi büyük olan polinomun derecesine eşittir.

Dereceleri aynı olan iki polinomun toplamının ve farkının derecesini bulmak için önce işlemleri yapmalıyız.

ÖRNEK

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x + 1$ ve $Q(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 8$ polinomları için

a) $P(x) + Q(x)$ ve $P(x) - Q(x)$ polinomlarını,

b) $der[P(x) + Q(x)]$ ve $der[P(x) - Q(x)]$ değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

a) $P(x) + Q(x) = (x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x + 1) + (4x^3 + 2x^2 - x + 8)$

$= (1 + 0)x^4 + (2 + 4)x^3 + (-5 + 2)x^2 + (1 + (-1))x + (1 + 8)$

$= x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9$ bulunur.

$P(x) - Q(x) = (x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x + 1) - (4x^3 + 2x^2 - x + 8)$

$= x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x + 1 - 4x^3 - 2x^2 + x - 8$

$= x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 2x - 7$ bulunur.

b) $der[P(x)] = 4$, $der[Q(x)] = 3$ ve $der[P(x)] > der[Q(x)]$ olduğundan

$der[P(x) + Q(x)] = 4$ ve $der[P(x) - Q(x)] = 4$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = 2x^6 - 3x^4 + 5x^2 + 4$ ve $Q(x) = 2x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 1$ polinomlarının toplamının ve farkının derecelerini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x) + Q(x) = 2x^6 - 3x^4 + 5x^2 + 4 + (2x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 1)$

$= 4x^6 + x^5 + 7x^2 + 5$

$P(x) - Q(x) = 2x^6 - 3x^4 + 5x^2 + 4 - (2x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 1)$

$= -x^5 - 6x^4 + 3x^2 + 3$

Buradan $der[P(x)] = der[Q(x)] = 6$ iken

$der[P(x) + Q(x)] = 6$ ve $der[P(x) - Q(x)] = 5$ buluruz.

ÖRNEK

$der[P(x)] = 4$ ve $der[Q(x)] = 6$ ise $der[P(x) + Q(x)]$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x) + Q(x)$ polinomunun derecesi, $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarından hangisinin derecesi büyük ise ona eşittir. Dolayısıyla $der[P(x) + Q(x)] = 6$ olur.

Etkinlik

Aşağıdaki tablolarda boşlukları uygun şekilde doldurunuz.

Polinomlar	$der[P(x)]$	$der[Q(x)]$	$P(x) + Q(x)$	$der[P(x) + Q(x)]$
$P(x) = 3x^5 + 2x^3 + 1$	5	2		
$Q(x) = 4x^2 + x + 2$				

Polinomlar	$der[P(x)]$	$der[Q(x)]$	$P(x) - Q(x)$	$der[P(x) - Q(x)]$
$P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3$				
$Q(x) = 4x^3 + x^2 + x$				

◈ Her iki tablodaki polinomların dereceleri ile toplamlarının ve farklarının derecelerini inceleyiniz.

✷ Dereceleri aynı olan polinomlarla farklı olan polinomların toplamlarının ve farklarının dereceleri ile ilgili neler söyleyebilirsiniz? Açıklayınız.

ÖRNEK

$P(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 1$ ve $Q(x) = 3x^3 - x^2 + cx + d$ polinomları için

$P(x) + Q(x) = 10x^3 + x^2 + 5x - 7$ olduğuna göre $a + b + c + d$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Önce $P(x) + Q(x)$ polinomunu bulalım.

$P(x) + Q(x) = (ax^3 + bx^2 + 3x - 1) + (3x^3 - x^2 + cx + d)$

$= (a + 3)x^3 + (b - 1)x^2 + (3 + c)x + (-1 + d)$ ve

$P(x) + Q(x) = 10x^3 + x^2 + 5x - 7$ olarak verildiğinden bu iki polinomu eşitlediğimizde

$a + 3 = 10 \Rightarrow a = 7,$ $\quad$ $b - 1 = 1 \Rightarrow b = 2$

$3 + c = 5 \Rightarrow c = 2,$ $\quad$ $-1 + d = -7 \Rightarrow d = -6$ olur ve

$a + b + c + d = 7 + 2 + 2 - 6 = 5$ bulunur.

ÖRNEK

$a \in \mathbb{N}$ olmak üzere $der[P(x)] = 4a + 3$, $der[Q(x)] = 2a + 1$ ve $der[P(x) + Q(x)] = 11$ ise a değerini bulalım.

ÇÖZÜM

a bir doğal sayı ve $4a + 3 > 2a + 1$ olduğundan toplam polinomun derecesi $4a + 3$ tür.

O hâlde $4a + 3 = 11 \Rightarrow a = 2$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x + 4$ ve $Q(x) = ax^3 - bx^2 + 3x - 5$ polinomları için

$P(x) + Q(x) = 7x^3 + 2x^2 + cx + d$ olduğuna göre $a + b + c + d$ sonucunu bulalım.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x + 4 \\ + \quad Q(x) = ax^3 - bx^2 + 3x - 5 \end{array}\right\}$$ Bu iki eşitliği taraf tarafa toplayalım.

$P(x) + Q(x) = (3 + a)x^3 + (5 - b)x^2 + x - 1$

"$P(x) + Q(x)$" yerine $7x^3 + 2x^2 + cx + d$ yazalım.

$7x^3 + 2x^2 + cx + d = (3 + a)x^3 + (5 - b)x^2 + x - 1$

Bu eşitlikten $a + 3 = 7$, $5 - b = 2$, $c = 1$ ve $d = -1$ olur.

Bu durumda $a = 4$, $b = 3$, $c = 1$, $d = -1$ olur ve $a + b + c + d = 7$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 7x + 6$ ve $Q(x) = ax^2 - bx + c$ veriliyor.

$3P(x) - 2Q(x) = 6x^3 - 14x^2 + 23x + 12$ olduğuna göre a, b ve c yi bulalım.

ÇÖZÜM

$3P(x) = 3(2x^3 - 6x^2 - 7x + 6) = 6x^3 - 18x^2 - 21x + 18$

$-2Q(x) = -2(ax^2 - bx + c) = -2ax^2 + 2bx - 2c$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$3P(x) - 2Q(x) = 6x^3 - (18 + 2a)x^2 + (-21 + 2b)x + 18 - 2c$

"$3P(x) - 2Q(x)$" yerine $6x^3 - 14x^2 + 23x + 12$ yazalım.

$6x^3 - 14x^2 + 23x + 12 = 6x^3 - (18 + 2a)x^2 + (-21 + 2b)x + 18 - 2c$

Bu eşitlikten $-(18 + 2a) = -14 \Rightarrow -2a = 4 \Rightarrow a = -2,$

$-21 + 2b = 23 \Rightarrow 2b = 44 \Rightarrow b = 22,$

$18 - 2c = 12 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$ olarak bulunur.

ÖRNEK

$P(x+1) + P(x-1) = 2x - 6$ ise $P(x)$ polinomunu bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x+1)$ ve $P(x-1)$ polinomlarının toplamı 1. dereceden $2x - 6$ polinomuna eşit olduğu için $P(x) = ax + b$ şeklinde 1. dereceden bir polinom alalım.

$P(x+1) = a(x+1) + b = ax + a + b$

$P(x-1) = a(x-1) + b = ax - a + b$ elde ederiz.

Bu iki eşitliği taraf tarafa toplarsak

$$\begin{array}{rl} & P(x+1) = ax + a + b \\ + & P(x-1) = ax - a + b \\ \hline & P(x+1) + P(x-1) = 2ax + 2b \end{array}$$

$2x - 6 = 2ax + 2b$ olur.

Bu durumda $2a = 2$ ve $a = 1$, $2b = -6$ ve $b = -3$ olur. $P(x) = x - 3$ bulunur.

Alıştırmalar 3-2

1) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 4x - 8,$ $\quad Q(x) = -2x^3 + 3x^2 + x + 3$

$R(x) = -2x^4 - 4x^2 + 7x - 2,$ $\quad T(x) = 5$

polinomları için aşağıdaki işlemleri yaparak bulduğunuz polinomların derecesini belirleyiniz.

a) $P(x) + Q(x)$ **b)** $Q(x) + R(x)$ **c)** $P(x) + R(x)$

ç) $3 \cdot [P(x) + Q(x)]$ **d)** $P(x) - Q(x)$ **e)** $Q(x) + T(x)$

f) $P(x) - R(x)$ **g)** $2P(x) + 4 \cdot R(x)$

2) $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları için $\text{der}[P(x) + Q(x)] = 12$ ve $\text{der}[Q(x)] = 8$ ise $\text{der}[P(x)]$ kaçtır?

3) $P(x) = 5x^2 - 3x + ax + b$ ve $Q(x) = cx^2 + 8x + d$ polinomları veriliyor.

$P(x) + Q(x) = 7x^2 + 10x - 4$ ise $a + b + c + d$ işleminin sonucunu bulunuz.

4) $a \in \mathbb{N}$ olmak üzere $der[P(x)] = 4a + 1$, $der[Q(x)] = 2a - 1$ ve $der[P(x) + Q(x)] = 13$ ise a kaçtır?

5) $P(x - 1) + P(x + 1) = 8x + 10$ ise $P(x)$ polinomunu bulunuz.

Polinomlarda Çarpma İşlemi

Bilgi

İki polinom çarpılırken birinci polinomun her terimi, ikinci polinomun her terimi ile ayrı ayrı çarpılır ve bu çarpımdan elde edilen terimler toplanır.

ÖRNEK

Şekilde ABCD dikdörtgeninde, $|AB| = 4x^2$ birim, $|BC| = 5x^3$ birim ise ABCD dikdörtgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$\text{Alan}(ABCD) = |AB| \cdot |BC| = 4x^2 \cdot 5x^3 = 20x^5 \text{ br}^2$ olur.

Burada çarpma işlemini yaparken katsayıları birbiriyle çarptığımıza ve aynı değişkenlerin üslerini topladığımıza dikkat edelim.

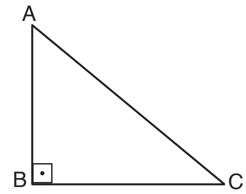
ÖRNEK

$P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ve $Q(x) = 2x + 5$ polinomlarının çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}
P(x) \cdot Q(x) &= (3x^2 - 2x + 1) \cdot (2x + 5) \\
&= 3x^2 \cdot (2x + 5) - 2x(2x + 5) + 1 \cdot (2x + 5) \\
&= 6x^3 + 15x^2 - 4x^2 - 10x + 2x + 5 \\
&= 6x^3 + 11x^2 - 8x + 5 \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Etkinlik



Şekilde ABC dik üçgeninde, $[AB] \perp [BC]$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|AB| = 3x^2$ birim ve $|BC| = 2x^2 + 1$ birim olarak veriliyor.

✷ Üçgenin kenar uzunlukları birer polinom ifade eder mi?

◈ Üçgenin alanını bulunuz.

✷ Üçgenin alanı bir polinom ifade eder mi?

✷ İki polinomun çarpımı yine bir polinom mudur?

◈ $x = 5$ için $|AB|$ ve $|BC|$ uzunluğunu bulunuz.

◈ $x = 5$ için üçgenin alanını bulunuz.

ÖRNEK

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ ve $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 3$ polinomları veriliyor. $P(x) \cdot Q(x)$ işlemi yapıldığında x^4 lü terimin katsayısını bulalım.

ÇÖZÜM

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2) \cdot (x^3 + 2x^2 - 4x + 3)$$

x^4 lü terimleri; x^4 ile 3

$2x^3$ ile $-4x$

$-3x^2$ ile $2x^2$

$5x$ ile x^3 terimlerinin çarpımlarından elde ederiz.

$x^4 \cdot 3 + 2x^3 \cdot (-4x) + (-3x^2) \cdot (2x^2) + 5x \cdot x^3 = 3x^4 - 8x^4 - 6x^4 + 5x^4 = -6x^4$ olur.

Bu durumda x^4 lü terimin katsayısı -6 bulunur.

Bilgi

İki polinomun çarpımının derecesi, her iki polinomun dereceleri toplamına eşittir.

$der[P(x)] = m$ ve $der[Q(x)] = n$ olmak üzere,

$der[P(x) \cdot Q(x)] = m + n$ dir.

ÖRNEK

$P(x) = x^2 + 4x$ ve $Q(x) = x^3 + 3x^2$ polinomlarının çarpımını ve çarpım polinomunun derecesini bulalım.

ÇÖZÜM

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^2 + 4x) \cdot (x^3 + 3x^2) = x^2 \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 + 4x \cdot x^3 + 4x \cdot 3x^2$$
$$= x^5 + 3x^4 + 4x^4 + 12x^3 \text{ bulunur.}$$

$der[P(x)] = 2$ ve $der[Q(x)] = 3$ olduğundan $der[P(x) \cdot Q(x)] = 2 + 3 = 5$ olur.

Etkinlik

Tablodaki boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz.

Polinomlar	$der[P(x)]$	$der[Q(x)]$	$der[P(x) + Q(x)]$	$der[P(x) \cdot Q(x)]$
$P(x) = 3x^6 + 5x^4 - 1$				
$Q(x) = x^3 + 3x^2 - 1$				

◈ Tablodan elde ettiğiniz sonuçlara göre verilen iki polinomun toplamını ve çarpımını yapmadan polinomların derecelerini kullanarak toplamlarının ve çarpımlarının derecelerinin nasıl bulunabileceğini açıklayınız.

Bilgi

$der[P(x)] = m$ ve $der[Q(x)] = n$ olmak üzere

- $der[P(x) \mp Q(x)] = m \quad (m > n \text{ ise})$
- $der[P(x) \mp Q(x)] \leqslant m \quad (m = n \text{ ise})$
- $der[P(x) \cdot Q(x)] = m + n$
- $der[P(x^b)] = m \cdot b \quad (b \in \mathbb{N})$
- $der[P(b \cdot x)] = m \quad (b \in \mathbb{R})$
- $der\left[P^b(x)\right] = m \cdot b \quad (b \in \mathbb{N})$
- $der[P(Q(x))] = m \cdot n$ dir.

ÖRNEK

$P(x)$ polinomu için $der[P(x)] = 3$ olduğuna göre $2der[P(x)] + der[2P(x)]$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$der[2P(x)] = der[P(x)]$ olacağından $2der[P(x)] + der[2P(x)] = 2 \cdot 3 + 3 = 9$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x)$ polinom olmak üzere $der[P(x)] = 5$ ise $der[x^3 \cdot P(x^2)]$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x) = x^5$ olarak alınabilir. $P(x^2) = (x^2)^5 = x^{10}$ olur.

$P(x^2) = x^{10} \Rightarrow x^3 \cdot P(x^2) = x^3 \cdot x^{10} = x^{3+10} = x^{13}$ olduğundan

$der[x^3 \cdot P(x^2)] = 3 + 10 = 13$ bulunur.

Etkinlik

Tabloda boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz.

Polinomlar	$der[P(x)]$	$der[Q(x)]$	$der[x^2 P(x)]$	$der[Q(x^2)]$	$der[P^2(x-1)]$	$der[P^2(x) \cdot Q^3(x)]$	$der[P(2x) \cdot Q(x^3)]$
$P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3$							
$Q(x) = x^4 - x^3 - 1$							

◈ Elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırınız.

ÖRNEK

$P(x) = (mx + 1) \cdot (2x + n)$ ve $Q(x) = 6x^2 + (3p - 1)x + 5$ polinomları veriliyor. Her x gerçek sayısı için $P(x) = Q(x)$ olduğuna göre $m + n + p$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Önce $P(x) = Q(x)$ in her iki tarafındaki çarpma işlemlerini yapalım.

$2mx^2 + mnx + 2x + n = 6x^2 + 3px - x + 5$ olur. Buradan,

$2m = 6 \Rightarrow m = 3$ ve $n = 5$ olur.

$mn + 2 = 3p - 1 \Rightarrow 3 \cdot 5 + 2 + 1 = 3p \Rightarrow 18 = 3p \Rightarrow p = 6$

$m + n + p = 3 + 5 + 6 = 14$ bulunur.

Alıştırmalar 3-3

1) Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Polinomlar	der[P(x)]	der[Q(x)]	der[P(x) + Q(x)]	der[P(x) – Q(x)]	der[P(x³) · Q²(x)]
$P(x) = x^3 + x - 2$					
$Q(x) = x^2 - 3$					

2) P(x) ve Q(x) polinomları için $der[P(x)] = 3$ ve $der[Q(x)] = 2$ veriliyor. Aşağıdaki ifadeler doğru ise yay ayraç içine "D", yanlış ise "Y" yazınız.

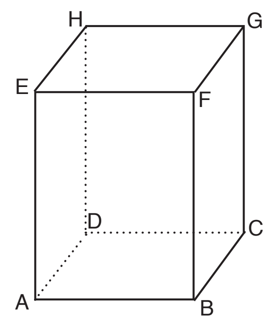
( ) $der\left[P^2(x^3+1)\right] = 18$

( ) $der\left[Q^3(2x^2-1) \cdot P(x^3)\right] = 21$

( ) $der\left[P^2(x)\right] \cdot der\left[Q(x^3)\right] = 12$

( ) $der\left[P^4(x) + Q^3(x)\right] = 6$

3) Şekildeki kare dik prizmanın taban kenarının uzunluğu $(x+2)$ birim, yüksekliği $(3x-1)$ birim olduğuna göre kare dik prizmanın hacminin kaç birimküp olduğunu veren polinomu yazınız.



4) Aşağıdaki işlemlerin eşit olduğu polinomları bulunuz.

a) $(x+3) \cdot (x-1)$

b) $(x-2)^3$

c) $(2x+3)^2$

ç) $(x+2) \cdot (5x-1) \cdot x$

d) $(x^2+4x+1) \cdot (-3x^2-x-2)$

e) $2 \cdot (x-1) \cdot (x-3) + (x+2)^2$

5) $P(x) = (a-1)x^3 + bx^2 - 4,\ Q(x) = 2x^3 + (a+1)x^2 + (c-1)x + d - 2$ polinomları veriliyor.

$P(x) = Q(x)$ olduğuna göre $a + b + c + d$ işleminin sonucunu bulunuz.

6) $P(x) = (-x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1),\ Q(x) = (x^3 - mx^2 + x + 2)$ polinomları veriliyor. $P(x) \cdot Q(x)$ polinomunda x^3 lü terimin katsayısı 15 ise m kaçtır?

3

Polinomlarda Bölme İşlemi

Bilgi

P(x) polinomunu sıfırdan farklı bir Q(x) polinomuna böldüğümüzde bölüm polinomu B(x), kalan polinomu K(x) ise

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} - \quad & B(x) \\ \hline K(x) & \end{array} \Rightarrow P(x) = Q(x)\cdot B(x) + K(x) \text{ ve } \text{der}[K(x)] < \text{der}[Q(x)] \text{ olur.}$$

$K(x) = 0$ ise $P(x) = Q(x)\cdot B(x)$ olur. Yani **P(x) polinomu, Q(x) polinomuna tam bölünüyor** denir.

İki polinomun birbirine bölünmesinde sırası ile aşağıdaki işlemler yapılır**:**

a) Bölünen ve bölen polinomun terimleri, derecelerine göre büyükten küçüğe doğru sıralanır.

b) Bölünenin birinci terimi, bölenin birinci terimine bölünerek, bölümün ilk terimi bulunur.

c) Bulunan bu ilk terim, bölenin bütün terimleri ile çarpılır. Aynı dereceli terimler alt alta gelecek şekilde bölünenin altına yazılır ve çıkarma işlemi yapılır.

ç) Çıkan sonuçla yukarıdaki işlemler tekrarlanır. Kalanın derecesi, bölenin derecesinden küçük olana kadar işleme devam edilir.

Bir bölme işleminde bölünen polinomun derecesi, bölen polinomun derecesinden büyük veya bölen polinomun derecesine eşittir.

ÖRNEK

$P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$ polinomunu $Q(x) = x - 1$ polinomuna bölerek, bölüm ve kalan polinomlarını bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{rr|l} & \cancel{x^3} + 2x^2 - x + 2 & x - 1 \\ \cline{3-3} - & \cancel{-x^3} \pm x^2 \quad\quad\quad & x^2 + 3x + 2 \\ \cline{1-2} & \cancel{3x^2} - x + 2 & \\ - & \cancel{-3x^2} \pm 3x \quad\; & \\ \cline{1-2} & \cancel{2x} + 2 & \\ - & \cancel{-2x} \pm 2 & \\ \cline{1-2} & 4 & \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x} = x^2 \qquad \frac{3x^2}{x} = 3x \qquad \frac{2x}{x} = 2$$

Bu bölme işlemini,

$\underbrace{x^3 + 2x^2 - x + 2}_{\text{Bölünen}} = \underbrace{(x - 1)}_{\text{Bölen}} \cdot \underbrace{(x^2 + 3x + 2)}_{\text{Bölüm}} + \underbrace{4}_{\text{Kalan}}$ biçimde ifade edebiliriz.

Bilgi

Bir $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ polinomunun bölüm polinomu $B(x)$ ise $B(x)$ polinomunun derecesi,

$der[B(x)] = der[P(x)] - der[Q(x)]$ olur.

ÖRNEK

$P(x) = 3x^4 + 2x^3 + x - 1$ polinomunun $Q(x) = x^3 + 2$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm polinomunu ve bu polinomun derecesini bulalım.

ÇÖZÜM

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3\cancel{x^4} + 2x^3 + x - 1 & x^3 + 2 \\
\cline{3-3}
+ & \cancel{-3x^4} \mp 6x & 3x + 2 \\
\cline{1-2}
 & \cancel{2x^3} - 5x - 1 & \\
- & \cancel{-2x^3} \mp 4 & \\
\cline{1-2}
 & -5x - 5 &
\end{array}
$$

Bölme işlemini $3x^4 + 2x^3 + x - 1 = (x^3 + 2)(3x + 2) + (-5x - 5)$ şeklinde yazabiliriz.

Buradan; bölüm polinomu $B(x) = 3x + 2$,

kalan polinomu $K(x) = -5x - 5$ olur.

$der[P(x)] = 4$ ve $der[Q(x)] = 3$ iken

$der[B(x)] = der[P(x)] - der[Q(x)] = 4 - 3 = 1$ buluruz.

ÖRNEK

$der[P(x) \cdot Q(x)] = 10$ ve $der\left[\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right] = 2$ olduğuna göre $P(x) + Q(x)$ polinomunun derecesini bulalım.

ÇÖZÜM

$der[P(x)] = a$ ve $der[Q(x)] = b$ olsun.

$der[P(x) \cdot Q(x)] = a + b = 10$ ve $der\left[\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right] = a - b = 2$ olur.

$$
\begin{array}{rl}
 & a + \cancel{b} = 10 \\
+ & a - \cancel{b} = 2 \\
\hline
 & 2a = 12 \\
 & a = 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a + b = 10 \\
6 + b = 10 \\
b = 4
\end{array}
$$

$der[P(x)] > der[Q(x)]$ olduğundan $der[P(x) + Q(x)] = 6$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) \cdot P(x-2) = 9x^2 - 12x - 5$ veriliyor. Buna göre $P(x)$ polinomunu bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x)$ ve $P(x-2)$ polinomlarının çarpımı 2. dereceden $9x^2 - 12x - 5$ polinomuna eşit olduğu için her iki polinom da 1. dereceden olmalıdır. Dolayısıyla $P(x) = ax + b$ şeklinde 1. dereceden bir polinom alalım.

$P(x-2) = a(x-2) + b = ax - 2a + b$ olur. Bu durumda

$P(x) \cdot P(x-2) = (ax+b) \cdot (ax - 2a + b)$

$P(x) \cdot P(x-2) = a^2x^2 - 2a^2x + abx + abx - 2ab + b^2$ olur.

$9x^2 - 12x - 5 = a^2x^2 + (-2a^2 + ab + ab)x - 2ab + b^2$

Bu eşitlikten $a^2 = 9$ ve $a = 3$ $(a = -3$ olamaz$)$,

$-2a^2 + ab + ab = -12$

$-2 \cdot 9 + 3b + 3b = -12$

$-18 + 6b = -12$

$6b = 6$ ve $b = 1$ olur.

O halde $P(x) = ax + b$ polinomu $P(x) = 3x + 1$ olarak bulunur.

ÖRNEK

Bir $P(x)$ polinomunun $Q(x) = x^2 + 2$ ile bölümünden elde edilen bölüm polinomu, $B(x) = 3x^2 + 2x - 6$ ve kalan polinomu $K(x) = -3x + 11$ ise $P(x)$ polinomunu bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ olduğundan

$P(x) = (x^2 + 2) \cdot (3x^2 + 2x - 6) + (-3x + 11)$ işlemini yaptığımızda

$P(x) = 3x^4 + 2x^3 - \cancel{6x^2} + \cancel{6x^2} + 4x - 12 - 3x + 11$

$P(x) = 3x^4 + 2x^3 + x - 1$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinomdur. $der[P^2(x) \cdot Q(x)] = 14$ ve $der\left[\frac{P(x)}{Q(x^2)}\right] = 2$ olduğuna göre $der[P(x)]$ ni bulalım.

ÇÖZÜM

$der[P(x)] = a$ ve $der[Q(x)] = b$ olsun.

$der[P^2(x) \cdot Q(x)] = 2 \cdot der[P(x)] + der[Q(x)] = 14$ den $2a + b = 14$ olur. I

$der\left[\frac{P(x)}{Q(x^2)}\right] = der[P(x)] - 2 \cdot der[Q(x)] = 2$ ise $a - 2b = 2$ olur. II

I ve II. denklemlerini çözelim;

$$\left.\begin{aligned} 2/\,2a + b &= 14 \\ a - 2b &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 4a + \cancel{2b} &= 28 \\ + \quad a - \cancel{2b} &= 2 \\ \hline 5a &= 30 \end{aligned} \Rightarrow a = 6 \Rightarrow der[P(x)] = a = 6 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$(x-1) \cdot P(x) = x^3 - x^2 + ax + 2$ eşitliğini sağlayan $P(x)$ polinomu için $P(1)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

a yı bulabilmek için verilen eşitlikte $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ olduğundan x yerine 1 yazalım.

$(1-1) \cdot P(1) = 1^3 - 1^2 + a \cdot 1 + 2$

$0 = 1 - 1 + a + 2 \Rightarrow a = -2$ olur.

$a = -2$ değerini polinomda yerine yazalım.

$(x-1) \cdot P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2 \Rightarrow P(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ ise bölmeyi yapalım.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} - \cancel{x^2} - 2x + 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} - \; \cancel{-x^3} \pm \cancel{x^2} \quad\quad\quad & x^2 - 2 \\ \cline{1-1} \cancel{-2x + 2} & \\ - \; \cancel{\pm 2x \mp 2} & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$P(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x^2 - 2$ olur ve $P(1) = 1^2 - 2 = -1$ olur.

Alıştırmalar 3-4

1) Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız.

a) $16x^4 - 10x^2 + 1 \;\big|\; 2x^2 - 1$ **b)** $x^3 + 2x^2 + x - 1 \;\big|\; x^2 + x + 1$ **c)** $x^4 - 3x^2 + 2x - 1 \;\big|\; x^2 + 1$

2) Yandaki bölme işlemine göre $Q(x)$ polinomunu bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-2x+4 & Q(x) \\ \cline{2-2} - \quad\quad\quad\quad & x^2+x-4 \\ \hline 12 & \end{array}$$

3) $(x+1)\cdot P(x)=x^4-x^3+3x+1$ eşitliğine göre $P(-1)$ değerini bulunuz.

4) $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olmak üzere

$\text{der}\left[\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right]=4$ ve $\dfrac{\text{der}[P(x)]}{\text{der}[Q(x)]}=3$ ise $\text{der}[P(x)]$ kaçtır?

5) $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları için $\text{der}\left[P^2(x)\cdot Q(x)\right]=8$ ve

$\text{der}\left[\dfrac{P^3(x)}{Q(x)}\right]=7$ ise $\text{der}[P(x)+Q(x)]$ kaçtır?

6) $x\cdot P(x)-3x=6x^3-9x^2$ eşitliğini sağlayan $P(x)$ polinomunun $x-1$ ile bölümünden elde edilen bölüm polinomunu bulunuz.

Bölme İşlemi Yapmadan Kalan Bulma

Bilgi

$P(x)$ Polinomunun $ax+b$ ile Bölümünden Elde Edilen Kalanı Bulma

Bir $P(x)$ polinomunu $ax+b$ polinomuna böldüğümüzde bölüm $B(x)$, kalan K olsun. Bu durumda

$P(x)=(ax+b)\cdot B(x)+K$ olur.

$ax+b=0$ aldığımızda kalanı buluruz. O hâlde,

$ax+b=0 \Rightarrow x=\dfrac{-b}{a}$ değerini bu eşitlikte x yerine yazarsak

$P\left(\dfrac{-b}{a}\right)=K$ elde ederiz.

$P(x)$ polinomunun $ax+b$ ile bölümünden elde edilen kalanı bulmak için $ax+b=0$ denkleminin kökünü, $P(x)$ polinomunda x yerine yazmak yeterlidir.

Burada $ax+b$ polinomu birinci dereceden bir polinom olduğundan kalan polinom sabit polinom olur.

ÖRNEK

$P(x) = 3x^4 - 2x^2 + x + 7$ polinomunun $Q(x) = x - 1$ polinomuna bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x) = (x - 1) \cdot B(x) + K$ olduğundan

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ dir.

$P(1)$ kalan olacağından polinomda x yerine 1 yazarız.

$P(1) = 3 \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 7 = 3 - 2 + 8 \Rightarrow P(1) = 9$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ polinomunun $Q(x) = 2x + 1$ polinomuna bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

ÇÖZÜM

$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$ dir.

Polinomda x yerine $\frac{-1}{2}$ yazarsak $P\left(\frac{-1}{2}\right)$ kalan olur.

$$P\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 2 = \frac{-1}{8} - \frac{3}{4} + 2$$

$P\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{9}{8}$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = x^2 - ax - 2a - 4$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan 8 olduğuna göre a değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ olur.

$P(2) = 8$ olduğundan polinomda x yerine 2 yazıp 8 e eşitleyelim.

$P(2) = 2^2 - 2a - 2a - 4 = 8$

$-4a = 8 \Rightarrow a = -2$ bulunur.

Etkinlik

$x^2 - x + 5$ metre uzunluğundaki kumaş, $x + 2$ metre uzunluğundaki eşit parçalara bölünmek isteniyor.

◈ $\begin{array}{r|l} x^2 - x + 5 & x + 2 \\ \cline{2-2} - & B(x) \\ \cline{1-1} K & \end{array}$ bölme işlemini yapınız.

◈ Kumaşın uzunluğunu $x + 2$, $B(x)$ ve K cinsinden yazınız.

◈ $x + 2$ denkleminin kökünü kumaşın uzunluğunda x yerine yazınız. Bulduğunuz sonuç nedir?

◈ Bölme işlemi yaparak elde ettiğiniz K değeri ile $x + 2$ nin kökünü polinomda yazarak elde ettiğiniz değeri karşılaştırınız.

✷ Bulduğunuz kalan polinomu nasıl bir polinomdur?

✷ O hâlde polinomlarda bölme işlemi yapmadan kalanı bulabileceğiniz nasıl bir yöntem geliştirebilirsiniz?

ÖRNEK

$P(x) = x^3 - ax^2 + bx + 2$ polinomu $x - 1$ ile tam bölünüyor. Bu polinomun $x + 1$ ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre a değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ dir.

$P(x)$ polinomu $x - 1$ ile tam bölünüyorsa $P(1) = 0$ dır.

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ dir.

$P(x)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalan 4 ise $P(-1) = 4$ olur.

$P(1) = 0 \Rightarrow P(1) = 1^3 - a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 = 0 \Rightarrow -a + b = -3$ ....I.

$P(-1) = 4 \Rightarrow P(-1) = (-1)^3 - a \cdot (-1)^2 + b(-1) + 2 = 4 \Rightarrow -a - b = 3$ ....II. olur.

I ve II. ifadeleri ortak çözelim.

$$\begin{array}{rl} & -a + \cancel{b} = -3 \\ + & -a - \cancel{b} = 3 \\ \hline & -2a = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ bulunur.} \end{array}$$

ÖRNEK

$P(x+2)-Q(x+3)=x^3-x^2+2x-3$ eşitliğini sağlayan $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları için $P(x)$ in $x-3$ ile bölümünden kalan 5 ise $Q(x)$ in $x-4$ ile bölümünden kalanı bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x)$ in $x-3$ ile bölümünden kalan 5 ise $P(3)=5$ tir.

$Q(x)$ in $x-4$ ile bölümünden kalanı bulmak için $Q(4)$ ü bulmalıyız.

Verilen eşitlikte x yerine 1 yazarsak

$P(1+2)-Q(1+3)=1^3-1^2+2\cdot1-3$

$P(3)-Q(4)=-1$

$5-Q(4)=-1 \Rightarrow Q(4)=6$ bulunur.

Bilgi

Bir $P(x)$ polinomunun $x-a$ ile bölümünden kalan $P(a)$ dır ve

"$P(a)=0 \Leftrightarrow (x-a), P(x)$ in bir çarpanıdır."

ÖRNEK

$P(x)=2x^2-ax+b$ polinomunun $x+2$ ve $x-1$ ile bölümünden kalanlar eşit olduğuna göre a değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$ ve $x-1=0 \Rightarrow x=1$ dir.

$P(x)$ polinomunun $x+2$ ve $x-1$ ile bölümünden kalanlar eşit olduğuna göre $P(-2)=P(1)$ dir.

$$\left.\begin{array}{l} P(-2)=2\cdot(-2)^2-a\cdot(-2)+b=8+2a+b \\ P(1)=2\cdot1^2-a\cdot1+b=2-a+b \end{array}\right\} \text{bu ifadeleri eşitlersek}$$

$8+2a+\cancel{b}=2-a+\cancel{b}$

$3a=2-8$

$a=-2$ bulunur.

3

ÖRNEK

$P(x) = 6x^3 + 5x + 4$ polinomunun $Q(x) = x - 2$ polinomuna bölümünden kalanı bulalım.

ÇÖZÜM

$Q(x) = 0$ denklemini sağlayan x değerini $P(x)$ de yerine yazarak kalanı bulabiliriz.

$Q(x) = x - 2$ için $Q(x) = 0$

$x - 2 = 0$

$x = 2,\quad P(2) = 6 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2 + 4$

$P(2) = 6 \cdot 8 + 10 + 4 = 62$

$P(x)$ polinomunun $Q(x) = x - 2$ polinomuna bölümünden kalan 62 dir.

ÖRNEK

$P(x) = 7x^2 - x + 1$ polinomunun $Q(x) = 2x + 4$ polinomuna bölümünden kalanı bulalım.

ÇÖZÜM

$Q(x) = 0$ yapan x değerini $P(x)$ te yerine yazmalıyız.

$2x + 4 = 0$ ise $2x = -4$ ve $x = -\frac{4}{2} = -2$

$P(-2) = 7 \cdot (-2)^2 - (-2) + 1$

$= 7 \cdot 4 + 2 + 1 = 31$

$P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomuna bölümünden kalan 31 dir.

ÖRNEK

$P(x) = 3x^2 + mx + 7$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan -10 ise m değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$x - 1 = 0$ dan $x = 1,\quad P(1) = -10$ sağlanmalıdır.

$P(1) = 3 \cdot 1^2 + m \cdot 1 + 7 = -10$

$3 + m + 7 = -10$

$m + 10 = -10$ ise $m = -20$ olur.

ÖRNEK

$P(x) = 2mx^5 + 2nx^3 + 7x + 5$ polinomunun bir çarpanı $x - 1$ ise polinomun $x + 1$ ile bölümünden kalanı bulalım.

ÇÖZÜM

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ dir.

$x - 1$ polinomu $P(x)$ polinomunun bir çarpanı ise $P(1) = 0$ dır.

$P(1) = 2m \cdot 1^5 + 2n \cdot 1^3 + 7 \cdot 1 + 5 = 0$

$2m + 2n + 12 = 0 \Rightarrow 2m + 2n = -12 \Rightarrow m + n = -6$ olur.

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ise $P(x)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalan, $P(-1)$ dir.

$$\begin{aligned} P(-1) &= 2m \cdot (-1)^5 + 2n \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1) + 5 \\ &= -2m - 2n - 2 \\ &= -2(m + n) - 2 \Rightarrow P(-1) = -2 \cdot (-6) - 2 \Rightarrow P(-1) = 10 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$P(x) = -3x^2 + 2x + 1$ olmak üzere $P(2x + 1)$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

ÇÖZÜM

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir.

$x = 2$ değerini $P(2x + 1)$ polinomunda yerine yazarsak kalanı bulmuş oluruz.

O hâlde kalan $P(2 \cdot 2 + 1) = P(5)$ tir.

$P(x) = -3x^2 + 2x + 1$ ise $P(5) = -3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1$

$= -75 + 10 + 1 \Rightarrow P(5) = -64$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) - x \cdot Q(x - 2) = x^3 + x - 5$ olmak üzere $P(x)$ in $x - 3$ ile bölümünden kalan 4 ise $Q(x)$ in $x - 1$ ile bölümünden kalanı bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x)$ in $x - 3$ ile bölümünden kalan 4 ise $P(3) = 4$ tür.

$Q(x)$ in $x - 1$ ile bölümünden kalan $Q(1)$ dir. Verilen ifadede x yerine 3 yazarsak

$P(3) - 3 \cdot Q(3 - 2) = 3^3 + 3 - 5$

$4 - 3 \cdot Q(1) = 25$ ise $Q(1) = -7$ bulunur.

ÖRNEK

$P(2x+3)=4x^2+5x-7$ ise $P(x)$ in $x-5$ ile bölümünden kalanı bulalım.

ÇÖZÜM

$x-5=0 \Rightarrow x=5$ tir.

$P(x)$ in $x-5$ ile bölümünden kalan $P(5)$ tir.

$P(5)$ i bulmak için $2x+3=5 \Rightarrow x=1$ olur ve verilen polinomda x yerine 1 yazılır.

$P(2\cdot 1+3)=4\cdot 1^2+5\cdot 1-7 \Rightarrow P(5)=2$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x-2)=3x^4+x^3-2x+5$ polinomunun $x+2$ ile bölümünden kalanı bulalım.

ÇÖZÜM

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$ olduğundan polinomun $x+2$ ile bölümünden kalanı bulmak için polinomda x yerine –2 yazarız.

$P(-2-2)=3\cdot(-2)^4+(-2)^3-2\cdot(-2)+5$

$P(-4)=48-8+4+5=49$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x)=2x^2-3x+1$ polinomunun $x+1$ ile bölümünden kalanı bulalım.

ÇÖZÜM

$x+1=0$ ise $x=-1$dir. Buna göre kalan $P(-1)$ değeridir.

$P(-1)$ kalan olduğundan

$P(x)=2x^2-3x+1$ ise

$P(-1)=2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+1$

$=6$ olur.

Bir Polinomun Sıfırı (Kökü)

Bilgi

Bir polinomun sıfırı, polinomun değerini 0 (sıfır) yapan sayıdır. Yani $x = a$ için $P(a) = 0$ ise $x = a$ sayısına **polinomun sıfırı** ya da **kökü** denir.

ÖRNEK

$P(x) = x^3 - ax^2 + 5x + 1$ polinomu $x - 3$ polinomu ile tam bölünüyorsa a değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x)$, $x - 3$ ile bölünüyorsa $x - 3 = 0$ için $x = 3$ değeri polinomun sıfırı (kökü) dır. Yani $P(3) = 0$ dır.

$$
\begin{aligned}
P(3) = 3^3 - a \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 1 &= 0 \text{ olur.} \\
27 - 9a + 15 + 1 &= 0 \\
-9a = -43 \Rightarrow a &= \frac{43}{9} \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

ÖRNEK

$P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ polinomunun çarpanlarından birinin $(x - 1)$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunu $(x - 1)$ e bölelim.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \cancel{x^3} - 3x^2 - x + 3 & x - 1 \\ \cline{3-3}
- & \cancel{-x^3} \pm x^2 & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{1-2}
 & \cancel{-2x^2} - x + 3 & \\
- & \cancel{\pm 2x^2} \mp 2x & \\ \cline{1-2}
 & \cancel{-3x} + 3 & \\
- & \cancel{\pm 3x} \mp 3 & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

$P(x)$ polinomunun $(x - 1)$ ile bölümünden kalan 0 dır. $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - 2x - 3)$ olur.

$(x - 1)$, $P(x)$ polinomunu tam olarak böldüğü için aynı zamanda çarpanıdır. Başka bir yolla;

$x - 1 = 0$ ise $x = 1$ olur.

$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$

$P(1) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $P(x)$ polinomunun sıfırlarından biri 1 sayısıdır.

ÖRNEK

$P(x) = x^3 + 5x^2 - x - 5$ polinomunun sıfırlarını bulalım.

ÇÖZÜM

Polinomun sıfırlarını (kökünü) bulmak için kullanılan yöntemlerden biri de sabit terimin çarpanlarının sırasıyla P(x) polinomunda x yerine yazılmasıdır.

P(x) polinomunda sabit terim olan –5, $1 \cdot (-5)$ ya da $(-1) \cdot 5$ şeklinde çarpanlarına ayrılır. Bu çarpanları sırayla polinomda x yerine yazarak polinomu sıfır yapan değerleri bulalım.

$P(1) = 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 1 - 5 = 1 + 5 - 1 - 5 = 0,$

$P(-1) = (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 - (-1) - 5 = -1 + 5 + 1 - 5 = 0,$

$P(5) = 5^3 + 5 \cdot 5^2 - 5 - 5 = 125 + 125 - 10 = 240,$

$P(-5) = (-5)^3 + 5(-5)^2 - (-5) - 5 = -125 + 125 + 5 - 5 = 0$ olur.

$P(1) = 0$, $P(-1) = 0$ ve $P(-5) = 0$ olduğundan –1, 1 ve –5, $P(x)$ polinomunun sıfırlarıdır.

Etkinlik

$P(x) = x^2 - 12x + 11$ polinomu veriliyor.

◈ Polinomun sabit terimini bulunuz.

◈ Sabit terimin çarpanlarını bulunuz.

◈ Sabit terimin çarpanlarından polinomu sıfır yapan değerleri bulunuz.

✷ Polinomu sıfır yapan değerlere ne denir? Tartışınız.

◈ Polinomu sıfır yapan değerlerin sabit terimle ilgisini inceleyiniz.

◈ Polinomun derecesi ile polinomu sıfır yapan değerlerin sayısını karşılaştırınız ve bir sonuç çıkarınız.

Alıştırmalar 3-5

1) Sol sütunda verilen bölünen ve bölen polinomlara göre kalanı bulup sağ sütundakilerle eşleştiriniz.

	Bölünen polinom	Bölen polinom
1	$P(x)$	$x+5$
2	$P(x+4)$	$x-2$
3	$P(x^2+x)$	$x-3$
4	$P\left(\frac{x}{2}+4\right)$	$x+8$
5	$P\left(\frac{x}{3}-1\right)$	$2x+12$

	Kalan
a	$P(6)$
b	$P(12)$
c	$P(9)$
ç	$P(-5)$
d	$P(0)$
e	$P(-3)$

2) Aşağıdaki ifadeler doğru ise yay ayraç içine "D", yanlış ise "Y" yazınız.

( ) $P(x)$ polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalan $P(2)$ dir.

( ) $P(x+4)$ polinomunun x ile bölümünden kalan $P(4)$ tür.

( ) $der[P(x)] = a$ ve $der[Q(x)] = b$ ise $der\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = \frac{a}{b}$ dir.

( ) Bir $P(x)$ polinomunun $ax+b$ polinomuna bölümünden kalan daima sabit polinomdur.

3) Aşağıdaki her şıkta verilen $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomuna bölümünden kalanı bölme işlemi yapmadan bulunuz.

a) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 5$
$Q(x) = x + 1$

b) $P(x) = 6x^2 - 4x + 2$
$Q(x) = 2x - 1$

c) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x - 2$
$Q(x) = -x + 3$

ç) $P(x) = 8x^3 + 4x - 1$
$Q(x) = 2x + 3$

d) $P(x) = -x^5 + x^3 + 1$
$Q(x) = x$

e) $P(x) = 2x^{10} - 3x^7 + x^5 - x^2 + 1$
$Q(x) = x - 1$

4) $P(x+2) = x^2 - 3x + 5$ olmak üzere $P(x)$ polinomunun $x-1$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

5) $x^4 + (2n - 1)x^3 + (n + 3)x + 6$ ifadesinin çarpanlarından biri $x - 1$ ise n kaçtır?

6) $P\left(\dfrac{2x+7}{5}\right) = x^3 - 3x^2 + ax + 4$ eşitliği veriliyor. $P(x)$ polinomu $x - 3$ ile tam bölündüğüne göre a kaçtır?

7) $x^3 - 3x^2 + 7x + m$ litre hacmindeki bir su deposunda bulunan su, $x - 2$ litre hacmindeki şişelere eşit miktarlarda doldurulduğunda 7 litre su arttığına göre m kaçtır?

8) $P(x) = (a + 2)x^{10} - 2ax^8 + (a - 1)x^6 + a - 5$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalan -2 ise a kaçtır?

9) $P(x) = 2x^4 + mx^3 - x^2 + 1$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan 3 ise $x + 1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

10) $\dfrac{P(x-6)}{Q(x)} = 4x^3 + 7x^2 - 5x - 16$ olmak üzere $Q(x)$ in $x + 2$ ile bölümünden kalan 6 ise $P(-8)$ kaçtır?

11) $P(x) = 5x^3 - 3x^2 + mx + 6$ polinomu $x + 1$ ile tam bölündüğüne göre, $P(x)$ in $x - 1$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

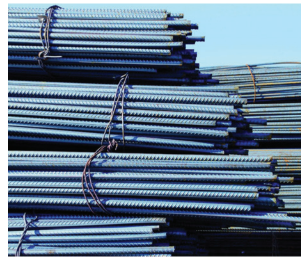
12) $\dfrac{P(x+3) + x^2}{Q(x+1)} = x + 2$ eşitliğini sağlayan $P(x)$ polinomunun $x - 4$ ile bölümünden kalan 3 ise $Q(x)$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

13) $P(x - 1) = x^2 - 3x + k + 2013$ veriliyor. $P(x + 1)$ polinomunun bir çarpanı $x + 2$ olduğuna göre k kaçtır?

14) $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının $x - 2$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla 3 ve 4 tür. Buna göre $2P(x) + Q(x)$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

3.2. Polinomların Çarpanlara Ayrılması





Bir inşaat yapılırken kullanılacak malzemeler çok fazladır. Malzemeler, gerek maliyet gerek kalite olarak çeşitlilik gösterir. Kullanılacak malzemeler önceden sınıflandırılıp seçildikten sonra inşaata başlanırsa hem zaman hem de maliyet açısından avantaj sağlanır. Aynı zamanda inşaatı bitirme süresi de kısalır.

İnşaat malzemelerini önceden seçip sınıflandırmamız bize ne gibi kolaylıklar sağlar?

Polinomun terimlerini gruplandırmamız çarpanlarına ayırırken bize kolaylıklar sağlar mı? Açıklayınız.

Çarpanlara Ayırma Yöntemleri

Dikkat

Bir polinom ifadesinin daha düşük dereceli ifadelerin çarpımı şeklinde yazılmasına **çarpanlara ayırma** denir. Çarpanlara ayırma, rasyonel ifadeleri sadeleştirmede ve denklem çözümlerinde büyük kolaylıklar sağlar.

Ortak Çarpan Parantezine Alarak Çarpanlara Ayırma Yöntemi: Bir polinomun her terimindeki ortak çarpanların parantez içine alınarak yazılması işlemine denir.

ÖRNEK

$P(x) = 4x^3$, $Q(x) = x^2$ polinomları veriliyor. Buna göre $P(x) + Q(x)$ polinomunu çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$P(x) + Q(x) = 4x^3 + x^2$ olur. Bu polinomu x^2 ortak çarpan parantezine alırsak

$P(x) + Q(x) = x^2(4x + 1)$ olur.

ÖRNEK

$P(x) = 4x^3 + 12x^2 + 4x$ polinomunu çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

Tüm terimlerde 4x ortak çarpan olduğundan

$P(x) = 4x(x^2 + 3x + 1)$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = (x-2)^3(3-x) + (2-x)^3(x-1)$ polinomunu çarpanlara ayıralım.

ÇÖZÜM

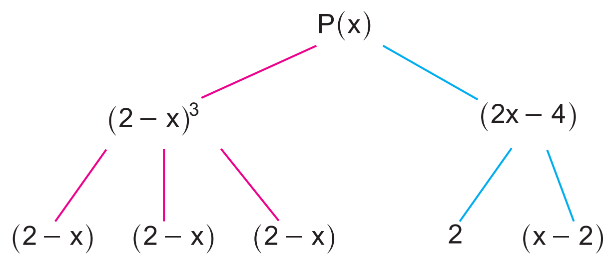
$(x-2)^3 = -(2-x)^3$ eşitliği yerine yazılırsa

$P(x) = -(2-x)^3(3-x) + (2-x)^3(x-1)$

Polinom $(2-x)^3$ ortak çarpan parantezine alınırsa

$$\begin{aligned} P(x) &= (2-x)^3\cdot(-(3-x)+(x-1)) \\ &= (2-x)^3\cdot(-3+x+x-1) \\ &= (2-x)^3\cdot(2x-4) \\ &= -(x-2)^3\cdot 2\cdot(x-2) \\ &= -2(x-2)^3\cdot(x-2) \\ &= -2(x-2)^4 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$P(x)$ polinomunun çarpanlarını şema ile gösterelim.



ÖRNEK

$P(x) = (x+2)^3(x-1)^2 + (1-x)^2(x+2)^2$ polinomunu çarpanlara ayıralım.

ÇÖZÜM

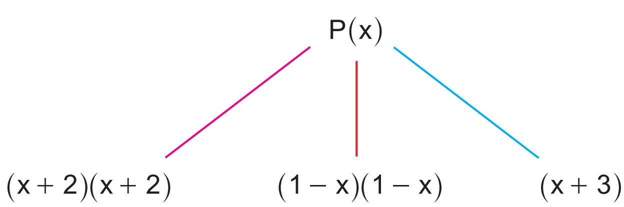
$(1-x)^2 = (x-1)^2$ eşitliğinden

$P(x) = (x+2)\cdot(x+2)^2\cdot(1-x)^2 + (1-x)^2\cdot(x+2)^2$ polinomu $(x+2)^2\cdot(1-x)^2$ ortak çarpan parantezine alınırsa

$P(x) = (x+2)^2(1-x)^2(x+2+1)$

$P(x) = (x+2)^2(1-x)^2(x+3)$ bulunur.

$P(x)$ polinomunun çarpanlarını şema ile gösterelim.



ÖRNEK

$P(x) = x^{12} + 2x^9 + 3x^6 + x^3$ polinomunu çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

Tüm terimlerde x^3 ortak çarpan olduğundan $P(x) = x^3(x^9 + 2x^6 + 3x^3 + 1)$ bulunur.

Gruplandırma İle Çarpanlara Ayırma Yöntemi: Polinomun tüm terimlerinde ortak bir çarpan bulunmuyorsa önce ortak çarpanı olan terimler gruplandırılır, sonra her grup parantez içindeki ifadesi aynı olacak şekilde çarpanlarına ayrılır.

ÖRNEK

$(a^2 - ab + ca - cb)$ çok terimlisini önce gruplandıralım sonra ortak çarpan parantezine alarak çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

Öncelikle ilk iki terimi a, son iki terimi de c ortak çarpan parantezine alırsak

$a(a - b) + c(a - b)$ olur. İfade $(a - b)$ ortak çarpan parantezine alınırsa

$(a - b)(a + c)$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = x^5 - x^4 + 2x - 2$ polinomunu gruplandırarak çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$P(x) = \underbrace{x^5 - x^4}_{\text{I. grup}} + \overbrace{2x - 2}^{\text{II. grup}}$ ilk iki terim x^4 ortak çarpan parantezine, son iki terim 2 ortak çarpan parantezine alınırsa $P(x) = x^4(x - 1) + 2(x - 1)$ olur.

Polinomu $(x - 1)$ ortak çarpan parantezine alırsak $P(x) = (x - 1)(x^4 + 2)$ bulunur.

Özdeşlikler

Tüm gerçek sayılar için sağlanan eşitliklere **özdeşlik** denir. Bazı önemli özdeşlikler hemen her matematik işleminde kullanılacağından bu önemli özdeşliklerden bahsedelim.

İki Kare Farkı Özdeşliği

Bilgi

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$(x-y)(x+y) = x^2 + \cancel{xy} - \cancel{yx} - y^2$

$= x^2 - y^2$ olur.

$\boxed{x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)}$

ÖRNEK

$x^2 - 16$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4)$ bulunur.

ÖRNEK

$25 - 4x^2$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$5^2 - (2x)^2 = (5-2x)(5+2x)$ bulunur.

ÖRNEK

$(x+y+2)^2 - (x-y-1)^2$ cebirsel ifadesini iki kare farkı özdeşliğini kullanarak çarpanlara ayıralım.

ÇÖZÜM

İki kare farkı özdeşliği, cebirsel ifade için uygulanırsa

$[(x+y+2)-(x-y-1)][(x+y+2)+(x-y-1)]$

$= [\cancel{x}+y+2-\cancel{x}+y+1][x+\cancel{y}+2+x-\cancel{y}-1]$

$= (2y+3)(2x+1)$ bulunur.

ÖRNEK

$(x-y)^2-(x+y)^2$ cebirsel ifadesini iki kare farkı özdeşliğini kullanarak çarpanlara ayıralım.

ÇÖZÜM

İki kare farkı özdeşliği, cebirsel ifade için uygulanırsa

$$[(x-y)-(x+y)][(x-y)+(x+y)]$$
$$=[\cancel{x}-y-\cancel{x}-y][x-\cancel{y}+x+\cancel{y}]$$
$$=(-2y)(2x)=-4yx \text{ bulunur.}$$

Tam Kare Özdeşliği

Bilgi

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $(x+y)$ ve $(x-y)$ nin karelerini gösteren özdeşliktir.

$$(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+xy+xy+y^2$$
$$=x^2+2xy+y^2 \text{ bulunur.}$$

$$(x-y)^2=(x-y)(x-y)=x^2-xy-xy+y^2$$
$$=x^2-2xy+y^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$(2x+3)^2$ ifadesinin açılımını tam kare özdeşliğini kullanarak yapalım.

ÇÖZÜM

$$(2x+3)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2$$
$$(2x+3)^2=4x^2+12x+9 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$(3x-5)^2$ ifadesinin açılımını tam kare özdeşliğini kullanarak yapalım.

ÇÖZÜM

$$(3x-5)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 5+5^2$$
$$(3x-5)^2=9x^2-30x+25 \text{ bulunur.}$$

3

Etkinlik

a) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

b) $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$

✷ $(x + y)^2$ ifadesini, $(x - y)^2$ ifadesi cinsinden nasıl yazabilirsiniz?

ÖRNEK

$x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = 2$ ve $x - y = 5$ ise $x^2 + y^2$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$ özdeşliğinde verilen değerler yazılırsa

$x^2 + y^2 = 5^2 + 2 \cdot 2 = 29$ bulunur.

ÖRNEK

$2x + 3y = 6$, $x \cdot y = -3$ olduğuna göre

$4x^2 + 9y^2$ değerini hesaplayalım.

ÇÖZÜM

$2x + 3y = 6$ eşitliğinde her iki tarafın karesi alınırsa

$4x^2 + 12xy + 9y^2 = 36$ olur. Buradan $x \cdot y = -3$ yazılırsa

$4x^2 + 12 \cdot (-3) + 9y^2 = 36$

$4x^2 + 9y^2 = 72$ bulunur.

Bilgi

- Her $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ eşitsizliği sağlanır. Herhangi bir gerçek sayının karesi negatif olamaz.
- Tam kare ifadenin en küçük değeri sıfırdır.

ÖRNEK

$P(x) = x^2 - 8x + 27$ polinomunun alabileceği en küçük değeri bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x) = x^2 - 8x + 27 = (x^2 - 8x + 16) + 11$ olup parantez içindeki ifade tam karedir. Buradan

$P(x) = (x-4)^2 + 11$ olur. $x = 4$ için $(x-4)^2$ nin en küçük değeri sıfır olduğundan

$P(x)$ in en küçük değeri 11 olur.

ÖRNEK

$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 29 = 0$ denklemini sağlayan x ve y değerleri için $x \cdot y$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Cebirsel ifadeyi tam kare elde edecek şekilde gruplandırırsak

$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 10y + 25) - 25 + 29 = 0$ olur. Buradan,

$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 0$ olur. Tam kare negatif olmayacağından

$(x-2)^2 = 0$ ve $(y+5)^2 = 0$ olur.

$x = 2$ ve $y = -5$ tir. Buradan $x \cdot y = 2 \cdot (-5) = -10$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = x^4 + x^2 + 1$ polinomunu terim ekleyip çıkararak çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunu tam kareye tamamlamak için polinoma x^2 ekleyip x^2 çıkaralım.

$P(x) = (x^4 + x^2 + 1 + x^2) - x^2$

$P(x) = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$ olur.

$(x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$ olduğundan

$P(x) = (x^2 + 1)^2 - x^2$ olur. İki kare farkı özdeşliğinden

$P(x) = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$ şeklinde çarpanlara ayrılır.

ÖRNEK

$P(x) = x^4 + 7x^2 + 16$ polinomunu terim ekleyip çıkararak çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunu tam kareye tamamlamak için polinoma x^2 ekleyip polinomdan x^2 çıkaralım.

$P(x) = (x^4 + 8x^2 + 16) - x^2$ olur.

$(x^2 + 4)^2 = x^4 + 8x^2 + 16$ olduğundan

$P(x) = (x^2 + 4)^2 - x^2$ olur. İki kare farkı özdeşliğinden

$P(x) = (x^2 + 4 + x)(x^2 + 4 - x)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır.

İki Terimin Küplerinin Toplamı ve Farkının Özdeşliği

Bilgi

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ ve

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ olur.

ÖRNEK

$x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = 6$ ve $x - y = 4$ eşitlikleri veriliyor. Buna göre $(x^3 - y^3)$ ifadesinin değerini hesaplayalım.

ÇÖZÜM

$(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ özdeşliğinde $(x - y)$ yerine 4 ve $x \cdot y$ yerine 6 yazılırsa

$(x^3 - y^3) = 4 \cdot (x^2 + 6 + y^2)$ olur.

$(x^2 + y^2) = (x - y)^2 + 2xy$ olduğundan yukarıdaki değerler yerine yazılırsa

$x^2 + y^2 = 4^2 + 2 \cdot 6 = 16 + 12 = 28$ olur.

$(x^3 - y^3) = 4 \cdot (x^2 + 6 + y^2)$ eşitliğinde $x^2 + y^2$ yerine 28 yazılırsa

$x^3 - y^3 = 4 \cdot (28 + 6)$

$x^3 - y^3 = 4 \cdot 34 = 136$ bulunur.

ÖRNEK

$x, y \in \mathbb{R}$, $x^3 + y^3 = 60$, $x + y = 6$ ise

$x \cdot y$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ özdeşliğinde $x + y$ yerine 6 yazılırsa

$60 = 6 \cdot (x^2 - xy + y^2)$

$x^2 - xy + y^2 = 10$ olur.

$(x + y) = 6$ eşitliğinde her iki tarafın karesi alınırsa

$x^2 + 2xy + y^2 = 36$ bulunur. Bulunan iki denklem alt alta yazılırsa

$$\begin{array}{rl} -/ & x^2 - xy + y^2 = 10 \\ & \underline{x^2 + 2xy + y^2 = 36} \\ & \cancel{-x^2} + xy - \cancel{y^2} = -10 \\ + & \underline{\cancel{x^2} + 2xy + \cancel{y^2} = 36} \end{array}$$

$$3xy = 26 \Rightarrow x \cdot y = \frac{26}{3} \text{ bulunur.}$$

İki Terim Toplamının ve Farkının Küpü Özdeşliği

Bilgi

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere iki terimin toplamının küpü,

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ olur.

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere iki terimin farkının küpü,

$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ olur.

ÖRNEK

$P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ polinomu veriliyor. Buna göre $P(\sqrt[3]{5} - 1)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ özdeşliğinden

$P(x) = (x + 1)^3$ olur.

x yerine $\sqrt[3]{5} - 1$ değeri yazılırsa

$P(\sqrt[3]{5} - 1) = (\sqrt[3]{5} - 1 + 1)^3$

$P(\sqrt[3]{5} - 1) = (\sqrt[3]{5})^3 = 5$ bulunur.

ÖRNEK

$x, y \in \mathbb{R}$ için $x^3 + y^3 = 40$ ve $xy(x + y) = 8$ olduğuna göre $(x + y)$ değerini hesaplayalım.

ÇÖZÜM

$x \cdot y(x + y) = 8$

$x^2y + xy^2 = 8$ dir. Buradan her iki taraf 3 ile çarpılırsa

$3x^2y + 3xy^2 = 24$ olur.

$(x + y)^3 = x^3 + 3xy^2 + 3xy^2 + y^3$ özdeşliğinde

$x^3 + y^3 = 40$

$3x^2y + 3xy^2 = 24$ yerine yazılırsa

$(x + y)^3 = 40 + 24$

$(x + y)^3 = 64$ olur. Buradan $x + y = 4$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 10$ polinomu veriliyor. Buna göre, $P(\sqrt[3]{3} + 2)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$(x - 2)^3$ özdeşliği kullanılırsa

$(x - 2)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3$

$(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ bulunur. Bu özdeşlik polinomda yerine yazılırsa

$P(x) = (x - 2)^3 - 2$ olur. x yerine $\sqrt[3]{2} + 2$ değeri yazılırsa

$P(\sqrt[3]{3} + 2) = (\sqrt[3]{3} - \cancel{2} + \cancel{2})^3 - 2$ ise $P(\sqrt[3]{3} + 2) = 3 - 2 = 1$ bulunur.

Değişken Değiştirme Yöntemi ile Çarpanlara Ayırma

Bilgi

Bir polinomdaki benzer terimlerin yeni bir değişken ile isimlendirilip daha sade hâle getirildikten sonra çarpanlara ayrılması işlemine **değişken değiştirme yöntemi ile çarpanlara ayırma** denir.

ÖRNEK

$x^6 + 2x^3y^3 + y^6$ cebirsel ifadesini değişken değiştirerek çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$x^3 = a,\ y^3 = b$ şeklinde değişken değiştirelim.

$x^6 + 2x^3y^3 + y^6 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ olur.

a ve b değerleri $(a+b)^2$ ifadesinde yerine yazılırsa

$x^6 + 2x^3y^3 + y^6 = (x^3 + y^3)^2$ bulunur.

ÖRNEK

$P(x) = (x^2 - x)^2 + 12x^2 - 12x + 36$ polinomunu, değişken değiştirme yöntemi ile çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$P(x) = (x^2 - x)^2 + 12x^2 - 12x + 36 = (x^2 - x)^2 + 12(x^2 - x) + 36$

$(x^2 - x) = a$ şeklinde değişken değiştirelim.

$P(x) = a^2 + 12a + 36 = (a+6)^2$ olur.

a yerine $x^2 - x$ yazılırsa

$P(x) = (x^2 - x + 6)^2$ bulunur.

$ax^2 + bx + c$ Biçimindeki İfadelerin Çarpanlarına Ayrılması

$ax^2 + bx + c$ ifadesinde, c nin iki çarpanı (p ve q) ile a nın iki çarpanı (m ve n) arasında $p \cdot n + q \cdot m = b$ şeklinde bir eşitlik sağlanıyorsa $ax^2 + bx + c$ ifadesinin çarpanlara ayrılmış şekli,

$ax^2 + bx + c = (mx + p) \cdot (nx + q)$ olur.

$$\begin{array}{lll} mx & p & \longrightarrow n \cdot p \\ nx & q & \longrightarrow m \cdot q \\ & & + \\ \hline & & n \cdot px + m \cdot qx = bx \end{array}$$

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a) $x^2 + 5x + 6$

b) $x^2 - 6x - 7$

c) $x^2 - 7x + 10$

ç) $3x^2 + 8x + 5$

d) $2x^2 + 5x - 12$

ÇÖZÜM

a) $x^2 + 5x + 6$

$$\begin{array}{cc} x & 3 \\ x & 2 \end{array}$$

$2x + 3x = 5x$ olduğundan

$x^2 + 5x + 6 = (x + 3) \cdot (x + 2)$ olur.

b) $x^2 - 6x - 7$

$$\begin{array}{cc} x & -7 \\ x & 1 \end{array}$$

$x - 7x = -6x$ olduğundan

$x^2 - 6x - 7 = (x - 7) \cdot (x + 1)$ olur.

c) $x^2 - 7x + 10$

$$\begin{array}{cc} x & -5 \\ x & -2 \end{array}$$

$-5x - 2x = -7x$ olduğundan

$x^2 - 7x + 10 = (x - 5) \cdot (x - 2)$ olur.

ç) $3x^2 + 8x + 5$

$$\begin{array}{cc} 3x & 5 \\ x & 1 \end{array}$$

$3x + 5x = 8x$ olduğundan

$3x^2 + 8x + 5 = (3x + 5) \cdot (x + 1)$ olur.

d) $2x^2 + 5x - 12$

$$\begin{array}{cc} 2x & -3 \\ x & 4 \end{array}$$

$8x - 3x = 5x$ olduğundan

$2x^2 + 5x - 12 = (2x - 3) \cdot (x + 4)$ olur.

Rasyonel İfade

Bilgi

$P(x)$ ve $Q(x)$ gerçek katsayılı iki polinom ve $Q(x) \neq 0$ olsun.

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki ifadelere **rasyonel ifade** denir.

ÖRNEK

$P(x) = x^3 - x$ ve $Q(x) = x$ polinomları veriliyor.

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel ifadesinin en sade hâlini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x^3 - x)}{x}$$

$P(x)$ polinomunu x ortak çarpan parantezine alırsak

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\cancel{x}(x^2 - 1)}{\cancel{x}}$$

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = x^2 - 1$ bulunur.

Bilgi

- Rasyonel ifadelerde her bir polinom çarpanlarına ayrıldıktan sonra ortak çarpanlar sadeleştirilir.

ÖRNEK

$P(x) = x^3 - 8$ ve $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ polinomları veriliyor. Buna göre $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel ifadesinin en sade hâlini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarını çarpanlarına ayıralım.
İki terimin küplerinin farkı özdeşliği kullanılırsa
$P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ olur.
$Q(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$ olur.

$-2 \quad -1$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{(x-2)}(x - 1)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 1} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}:\dfrac{x^2-2x}{x+1}$ rasyonel ifadesinin en sade hâlini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{x(x^2-4)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{x(x-2)}=\frac{x(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x+1)}{x(x-2)} \text{ olur.}$$

$$\frac{x\cdot\cancel{(x-2)}(x+2)}{(x-1)\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{x(x-2)}}=\frac{x+2}{x-1} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\dfrac{x^2-4}{1-\dfrac{2}{x}}\cdot\dfrac{1}{x}$ rasyonel ifadesinin en sade hâlini bulalım.

ÇÖZÜM

$\dfrac{x^2-4}{\dfrac{x-2}{x}}\cdot\dfrac{1}{x}$ olur. Buradan $\cancel{(x-2)}(x+2)\cdot\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{(x-2)}}\cdot\dfrac{1}{\cancel{x}}=x+2$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{4}{x}}:\dfrac{x+1}{x-2}$ rasyonel ifadesinin en sade hâlini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{\underset{(x)}{\dfrac{x}{1}}-\dfrac{1}{x}}{\underset{(x)}{\dfrac{x}{1}}-\dfrac{4}{x}}\cdot\frac{x-2}{x+1}=\frac{\dfrac{x^2-1}{x}}{\dfrac{x^2-4}{x}}\cdot\frac{x-2}{x+1}$$

$$=\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}\cdot\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x+1}}=\frac{x-1}{x+2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x-4}\cdot\dfrac{x^2-16}{\frac{4}{x}-1}$ rasyonel ifadesini en sade hâlini bulalım.

ÇÖZÜM

$\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+4)(x-1)}\cdot\dfrac{(x-4)(x+4)}{\frac{4-x}{x}}$ olur.

$$\frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+4)}\cancel{(x-1)}}\cdot\frac{(x-4)\cancel{(x+4)}}{\frac{-(x-4)}{x}}=(x-2)\cdot\frac{\cancel{(x-4)}}{\frac{\cancel{-(x-4)}}{x}}=(x-2)\cdot(-x)=-x^2+2x \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x+y}{y-x}-\dfrac{2xy}{y^2-x^2}$ rasyonel ifadesinin en sade hâlini bulalım.

ÇÖZÜM

$\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x+y}{\underset{-(x+y)}{y-x}}-\dfrac{2xy}{\underset{(-1)}{(y^2-x^2)}}=\dfrac{x^2+y^2+2xy-(x+y)^2}{(x^2-y^2)}$ olur.

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ özdeşliğinden $\dfrac{(x+y)^2-(x+y)^2}{x^2-y^2}=\dfrac{0}{x^2-y^2}=0$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{x^4-1}{x^3-1}\cdot\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ rasyonel ifadesinin en sade hâlini bulalım.

ÇÖZÜM

İki kare farkı ve iki terimin küplerinin farkı özdeşlikleri kullanılırsa

$\dfrac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\cdot\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ olur.

$$\frac{(x^2-1)\cancel{(x^2+1)}}{(x-1)\cancel{(x^2+x+1)}}\cdot\frac{\cancel{x^2+x+1}}{\cancel{x^2+1}}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=x+1 \text{ bulunur.}$$

Dikkat

Rasyonel ifadeler çarpanlarına ayrılırken yapılan gruplandırmalarda tam kare ve iki kare farkı özdeşliğine öncelik verilmelidir.

ÖRNEK

$\dfrac{x^2+2x-y^2+1}{x+1-y}$ rasyonel ifadesinin en sade hâlini bulalım.

ÇÖZÜM

$(x^2+2x+1)=(x+1)^2$ olduğundan

$\dfrac{x^2+2x-y^2+1}{x+1-y}=\dfrac{(x+1)^2-y^2}{x+1-y}$ olur. İki kare farkı özdeşliğinden

$\dfrac{\cancel{(x+1-y)}(x+1+y)}{\cancel{(x+1-y)}}=x+y+1$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{x^2+y^2+2xy-1}{x+y+1}$ rasyonel ifadesinin en sade hâlini bulalım.

ÇÖZÜM

$(x^2+2xy+y^2)=(x+y)^2$ olduğundan

$\dfrac{x^2+y^2+2xy-1}{x+y+1}=\dfrac{(x+y)^2-1}{x+y+1}$ olur. İki kare farkı özdeşliğinden

$\dfrac{(x+y-1)\cancel{(x+y+1)}}{\cancel{(x+1+y)}}=x+y-1$ bulunur.

ÖRNEK

$a, b \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4}$ rasyonel ifadesinin en sade hâli $\dfrac{x-5}{x+2}$ olduğuna göre $a \cdot b$ değerini hesaplayalım.

ÇÖZÜM

Paydayı çarpanlarına ayıralım.

$\dfrac{x^2+ax+b}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x-5}{x+2}$, $(x-2)$ ifadesi $\dfrac{x-5}{x+2}$ nin pay ve paydası ile çarpılırsa

$$\frac{x^2+ax+b}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-5)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$x^2+ax+b = (x-5)(x-2)$

$x^2+ax+b = x^2-7x+10$ olur. Polinom eşitliğinden,

$a=-7,\ b=10$ olur.

Bu durumda $a \cdot b = -70$ bulunur.

Alıştırmalar 3-6

1) Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayırınız.

a) $P(x) = x^2-2x-8$

b) $Q(x) = x^2-13x+36$

c) $R(x) = 3x^2-7x+2$

ç) $T(x) = 4x^2-3x-1$

2) $P(x) = x^3-x^2+2x-2$ polinomu veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi $P(x)$ polinomunun çarpanıdır?

A) $x+1$ B) x C) $2x+1$ D) $x-1$ E) x^2+x

3) $x^2+2yx+y^2-1$ cebirsel ifadesi veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi cebirsel ifadenin bir çarpanıdır?

A) $x-1$ B) $x+1$ C) $x+y-1$ D) $x-y-1$ E) $x-y+1$

4) $P(x)=(x^2-2x)^2-7(x^2-2x)-8$ polinomu veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi $P(x)$ polinomunun bir çarpanı **değildir**?

A) $(x-1)$ B) $(1-x)^2$ C) $x-4$ D) $x+2$ E) $x+8$

5) Aşağıdaki polinomları çarpanlarıyla eşleştiriniz.

a) $P(x)=x^2-2x+1$ ( )	**1)** $(x-1)(x+1)(x^2+1)$
b) $Q(x)=(x-1)^3-(1-x)$ ( )	**2)** (x^2-x+1)
c) $P(x)=x^4-1$ ( )	**3)** $(x-1)(x^2+x+1)$
ç) $T(x)=x^3-1$ ( )	**4)** $x\cdot(x+4)(x-1)$
d) $K(x)=x^3+3x^2-4x$ ( )	**5)** $(x-1)(x^2-2x+2)$
	6) $(x-1)^2$

6) $\dfrac{y^3x^2-y^2x^3}{yx^2-y^2x}$ rasyonel ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

7) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}:\dfrac{a^2-b^2}{2a+2b}$ ifadesinin en sade hâli aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2   B) 1   C) a   D) $a\cdot b$ E) $a-b$

8) $\left(\dfrac{a^2-25+b^2}{a\cdot b}+2\right):\left(\dfrac{a+b-5}{a\cdot b}\right)$ ifadesinin en sade hâli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a-b+1$ B) $a-b-5$ C) $a+b+5$ D) $a+b+4$ E) $a-5$

4. İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

4.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Denklemler iki niceliğin eşitliğini gösteren bir bağıntıdır. Denklemlerde eşitlik, bilinmeyenin belirli değerleri için sağlanır. Denklemler yardımıyla aritmetiğin çözemediği pek çok problemi çözebiliriz. Denklemler, matematik, astronomi, bilgisayar programcılığı, tıp, mimari gibi pek çok alanda kullanılmaktadır.

Denklemler başka hangi bilim dallarında kullanılıyor olabilir? Araştırınız.

Okuma Metni

Mısırlılar (MÖ 2000-1000), ikinci dereceden denklemlerin pozitif kökünü bulmak için algoritma geliştirmişlerdir. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çözümünde deneme yolunu kullanmışlardır. Bu yöntem; 15. ve 16. yüzyıllarda eski Mısır dışında, Hintliler ve İslam dünyası matematikçileri tarafından da kullanılmıştır. Eski Mısır'da denklemlerin çözümlerinde bugün kullandığımız (x, y, x^2, ...) gibi semboller kullanılmıştır. Babilliler, Eski Mısır'daki cebir anlayışından daha ileri giderek ikinci dereceden denklemlerin çözümleriyle uğraşmışlardır. MÖ 2000'li yıllarda Babil tabletlerinden alınan ikinci dereceden bir denklem, günümüz gösterimiyle de ifade edilmiştir.

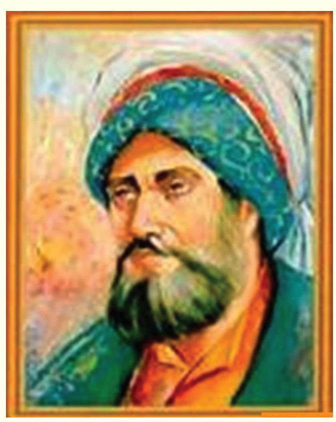
Babillilerin ardından cebir uğraşı Eski Yunan'daki matematik bilginleriyle devam etmiştir. Eski Yunan'da cebir dendiğinde akla gelen ilk isim Euclid'dir. Euclid, denklemlerin çözümlerinde Babillilerde olduğu gibi geometrik bir modelleme düşüncesinin hâkim olduğunu göstermektedir. Cebir alanında önemli çalışmaları olan bir diğer matematik bilgini ise MS 250'lerde yaşamış olan Yunanlı Diaphantus'tur. Diaphantus, çok değişkenli iki veya üç denklemden oluşan, sınırsız sayıda rasyonel çözümü olan denklemlerin çözümleriyle uğraşmıştır.

Diaphantus'tan sonraki süreçte Hintli matematikçiler cebirsel ifadelerin gösteriminde kısaltmaları kullanmışlardır. Hintli matematikçi Brahmagupta (MS 628), modern gösterimi $x^2 - 10x = -9$ olan denklemi çözerken geometrik bir düşünce yapısına başvurmuştur.


Brahmagupta'nın temsilî resmi

IX. yüzyılda yaşayan ve cebir alanında ilk defa eser yazan Türk bilgini Harezmî'dir. Harezmî ilk defa, birinci ve ikinci dereceden denklemleri analitik metotla; bir bilinmeyenli denklemleri de cebirsel ve geometrik metotlarla çözmenin kural ve yöntemlerini tespit etmiştir. Matematikte ilk kez sıfır rakamını kullanan Harezmî, cebir bilimini metodik ve sistematik olarak ortaya koymuştur.

Harezmî'nin bilime yaptığı en büyük katkı, sistemli bir şekilde cebir konusunda ilk defa yazılan "El'Kitab'ül-Muntasar fi Hısab'il Cebri ve'l-Mukabele" adlı eseridir. Hakkında bilgi veren kaynakların birçoğunda belirtildiği gibi Harezmî'nin adını günümüze kadar getiren bu eseri, dört temel kısımla değişik problemlerden bahseden beşinci bir ek kısımdan meydana gelmektedir. Kısımlardan birincisi Harezmî'nin "Durubu sitte" ya da "Mesaîl-i sitte" (altı denklem) $x^2 = a$, $x^2 = bx$, $ax = b$, $x^2 + ax = b$, $x^2 + b = ax$, $x^2 = ax + b$ şeklindeki altı denklemin çözüm yolları ile $(a \mp x), (b \mp x)$ gibi binom ifadelerinin çarpım kurallarını içermektedir.


Harezmî'nin temsilî resmi

Abdulhamid İbn Türk de sayılar teorisi ve cebir üzerine çalışmış, IX. yüzyılda yaşamış bir Türk İslam matematikçisidir. İkinci dereceden denklemlerin çözümü üzerine çalışmalarda bulunmuştur. Harezmî'den daha ayrıntılı olarak örneğin, $x^2 + c = bx$ şeklindeki bir denklemin diğer denklem tiplerinden farklı olarak iki çözümü olduğunu ayrı ayrı şekillerde göstermiştir.

"Kitabü'l-Câmi Filhesab (Kapsamlı Hesap Kitabı)", "Kitabü'l-Mu'amelât (Ölçme Kitabı)" ve "Kitab Al-Cebr Va'l-Mukabele (Katışık Denklemlerde Mantık Zaruretleri)" adlarını taşıyan kitaplar, eserlerinden bazılarıdır.

Kaynaklar: Ana Britannica Ansiklopedisi; Baki, A. (2008). Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi.

Abdulhamid İbn Türk'ün Temsili resim

Bilgi

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ biçimindeki ifadelere **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir.

Burada a, b, c denklemin katsayıları, x bilinmeyendir.

Bilgi

$3x + 1 = 0$ ve $x - 2 = 0$ denklemleri **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerdir.**

Bu iki denklemi çarpalım ve sonucu inceleyelim.

$$(3x + 1) \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

Derece Sabit terim

Görüldüğü gibi çarpım sonucunda elde edilen denklemde bir bilinmeyen bulunmaktadır. Denklemin derecesi 2 olduğundan bu denklem **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem**dir.

ÖRNEK

$3x^2 + 2x - 4 = 0$, $x^2 - x + 2 = 0$, $x^2 - 3 = 0$, $5x^2 + 4x = 0$, $x^2 = 0$, $x^3 + 2 = 0$, $x^2 + \frac{1}{x} = 0$ ve $x^4 + 3x - 1 = 0$ denklemlerinden ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olanları bulalım.

ÇÖZÜM

$3x^2 + 2x - 4 = 0$, $x^2 - x + 2 = 0$, $x^2 - 3 = 0$, $5x^2 + 4x = 0$, $x^2 = 0$ denklemlerinin her biri ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemdir.

$x^3 + 2 = 0$, $x^2 + \frac{1}{x} = 0$, $x^4 + 3x - 1 = 0$ denklemleri ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem değildir.

ÖRNEK

$(m-3)x^3 + mx^2 - (m+3)x + 2m + 5 = 0$ denklemi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre denklemin katsayılarının toplamını bulalım.

ÇÖZÜM

$$\underbrace{(m-3)}_{=0}x^3 + mx^2 - (m+3)x + 2m + 5 = 0$$

Denklem, ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre $m - 3 = 0$ olmalıdır.

$m - 3 = 0$ ise $m = 3$ olur. $m = 3$ değerini denklemde yerine yazalım.

$$(3-3)x^3 + 3x^2 - (3+3)x + 2 \cdot 3 + 5 = 0$$

$$3x^2 - 6x + 11 = 0 \text{ elde edilir.}$$

Bu durumda denklemin katsayıları $3, -6, 11$ olduğundan katsayılarının toplamı,

$3 + (-6) + 11 = 8$ olur.

Etkinlik

Tablodaki boş bırakılan yerleri, verilen denklemlere göre doldurunuz.

✷ Tabloya göre ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemde x li terimin ve sabit terimin bulunması zorunlu mudur?

✷ Bir denklemin ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olması için hangi terimin bulunması zorunludur?

İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklem ($ax^2 + bx + c = 0$)	**a**	**b**	**c**
$3x^2 - 2x + 4 = 0$	3	–2	4
$x^2 + 3x = 0$			
$5 - x^2 = 0$			
$4x^2 = 0$			
$\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2} = 0$			

3

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Kökleri ve Çözüm Kümesi

Bilgi

$ax^2 + bx + c = 0$ denklemi için, eğer varsa, x yerine yazıldığında denklemi sağlayan gerçek sayılara bu denklemin **kökleri**; köklerin oluşturduğu kümeye denklemin **çözüm kümesi** denir. Çözüm kümesini bulmak için $ax^2 + bx + c$ ifadesi çarpanlarına ayrılır. Çarpanların her biri sıfıra eşitlenerek birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerde olduğu gibi kökler bulunur.

ÖRNEK

$x^2 - 4 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

I. yol

$x^2 - 4 = 0$ denklemini iki kare farkı özdeşliğinden,

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2) \cdot (x+2) = 0$ şeklinde çarpanlarına ayırırız.

$x - 2 = 0$ veya $x + 2 = 0$
$x_1 = 2$ ve $x_2 = -2$

(Bir çarpım sıfıra eşitse çarpanlardan her biri ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek denklemin kökleri bulunur.)

Buradan $Ç = \{-2, 2\}$ olur.

II. yol

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$

$x_1 = -2$ ve $x_2 = 2$ (Karesi 4 olan sayılar – 2 ve 2 dir.)

$Ç = \{-2, 2\}$ dir.

Bulduğumuz – 2 ve 2 değerlerine denklemin kökleri denir. – 2 ve 2 değerlerini $x^2 - 4 = 0$ denkleminde x yerine yazdığımızda bu değerler denklemi sağlar.

ÖRNEK

$2x^2 + 8 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$2x^2 + 8 = 0$

$2x^2 = -8$

$x^2 = -4$ olur. Hiçbir gerçek sayının karesi negatif olmadığından bu denklemi sağlayan x gerçek sayısı bulunamaz. O hâlde $Ç = \emptyset$ dir.

ÖRNEK

$x^2 + 6x = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$x^2 + 6x = 0$ denkleminde eşitliğin sol tarafını x ortak çarpan parantezine alalım.

$$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x+6) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{veya} \quad x + 6 = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{ve} \quad x_2 = -6 \ \text{bulunur.}$$

$Ç = \{-6, 0\}$ olur.

ÖRNEK

$3x^2 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ dır. Denklemin birbirine eşit iki kökü olduğundan

$Ç = \{0\}$ olur.

ÖRNEK

$x^2 - 12x + 36 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$\begin{array}{ll} \downarrow & \downarrow \\ x & -6 \\ x & -6 \end{array} \left\} \begin{array}{l} (-6)\cdot(-6) = 36 \\ (-6x) + (-6x) = -12x \ \text{ise} \end{array} \right.$$

$x^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-6) = 0 \Rightarrow (x-6)^2 = 0$ şeklinde çarpanlara ayırırız.

Buradan $(x-6)^2 = 0$ ise

$$x - 6 = 0 \quad \text{veya} \quad x - 6 = 0$$

$$x_1 = 6 \quad \text{ve} \quad x_2 = 6$$

Denklemin birbirine eşit iki kökü olduğundan $Ç = \{6\}$ olur.

ÖRNEK

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

Bu denklemde x^2 yerine "t" yazarsak

$x^2 = t \Rightarrow x^4 = t^2$ olur.

$x^4 - 10x^2 + 9 = t^2 - 10t + 9$ olur.

Şimdi $t^2 - 10t + 9 = 0$ denklemini çözelim.

$(t-9)(t-1) = 0$

$\Rightarrow t-9=0$ veya $t-1=0$

$\Rightarrow t=9,\ t=1$

t yerine x^2 yazarsak

$\Rightarrow x^2 = 9,\ x^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 - 9 = 0$ veya $x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+3) = 0$ veya $(x-1)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 3,\ x = -3,\ x = 1,\ x = -1$ bulunur. $Ç = \{-3, -1, 1, 3\}$ olur.

ÖRNEK

$(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

2^x yerine t yazarsak

$t^2 - 5t + 4 = 0$ olur.

$(t-4)(t-1) = 0$

$t-4=0$ veya $t-1=0$

$t = 4,\ t = 1$ olur.

$2^x = 4$ veya $2^x = 1$

$2^x = 2^2$ veya $2^x = 2^0$

$x = 2,\ x = 0$ olur. $Ç = \{0, 2\}$ bulunur.

ÖRNEK

$9x^2 + 12x + 4 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{lcl} \multicolumn{3}{l}{9x^2 + 12x + 4 = 0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3x & & 2 \\ 3x & & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 2 = 4 \text{ ve } 6x + 6x = 12x \text{ olduğundan ve tam kare özdeşliğinden,}$$

$$9x^2 + 12x + 4 = 0 \Rightarrow (3x + 2)(3x + 2) = 0 \Rightarrow (3x + 2)^2 = 0 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow 3x + 2 = 0 \quad \text{veya} \quad 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = -\frac{2}{3} \quad \text{ve} \quad x_2 = -\frac{2}{3} \text{ olduğundan}$$

denklemin birbirine eşit iki kökü vardır ve $Ç = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ olur.

ÖRNEK

$9x^2 - \frac{1}{4} = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$$9x^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \downarrow \qquad \downarrow \\ 3x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ 3x \rightarrow +\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \\ \frac{3x}{2} + \left(-\frac{3x}{2}\right) = 0 \text{ olur. Buradan,} \end{array}$$

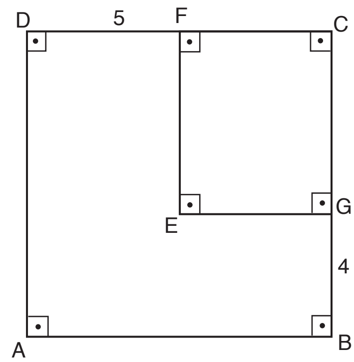
$$9x^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(3x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3x + \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ olur.}$$

$$3x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{veya} \quad 3x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{6} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-1}{6} \text{ olduğundan}$$

$Ç = \left\{\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}\right\}$ olur.

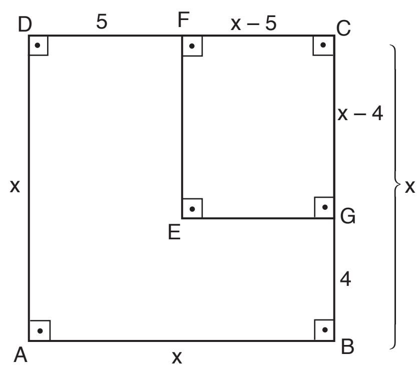
ÖRNEK



Şekilde verildiği gibi kare şeklinde çim ekili bahçesi olan bir adam, bu bahçenin bir bölümünü (EGCF dikdörtgeni) çilek dikmek için ayırıyor.

$|DF| = 5\,m, |BG| = 4\,m$ ve $A(EGCF) = 30\,m^2$ olduğuna göre çilek dikiminden sonra bu bahçede kaç m^2 çim ekili alan kalacağını bulalım.

ÇÖZÜM



Karenin bir kenar uzunluğuna x diyelim.

$A(EGCF) = 30\,m^2$ olduğundan

$(x-5)(x-4) = 30$

$x^2 - 9x + 20 = 30$

$x^2 - 9x - 10 = 0$

$(x+1)(x-10) = 0$

$x+1 = 0$ veya $x-10 = 0$

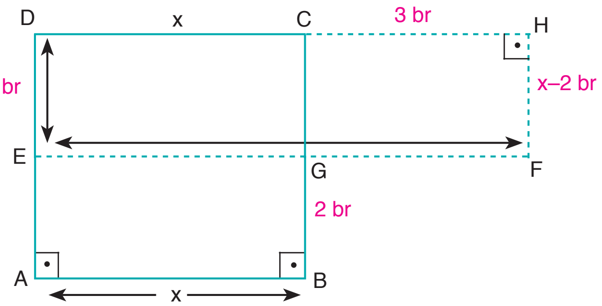
$x_1 = -1$ ve $x_2 = 10$ olur.

Uzunluk –1 olamayacağı için $x = 10$ metredir.

Çim ekili bölgenin alanını bulmak için kare şeklindeki bahçenin alanından dikdörtgen şeklindeki çilek dikilen alan çıkarılır.

$10^2 - 30 = 100 - 30 = 70\,m^2$ bulunur.

Etkinlik



Bir kenar uzunluğu x br olan ABCD karesi şeklindeki kartonun bir kenar uzunluğu 3 br artırılıp diğer kenar uzunluğu 2 br kısaltılarak EFHD dikdörtgeni elde ediliyor. Elde edilen dikdörtgenin alanı 104 br^2 dir.

- ◈ Verilenlere göre oluşan dikdörtgenin kısa kenar ve uzun kenar uzunluğunu yazınız.
- ◈ Dikdörtgeninin alanını veren ifadeyi yazınız.
- ◈ Dikdörtgenin alanı 104 br^2 olacak şekilde alanı veren denklemi kurunuz.
- ◈ Bu denklemi $ax^2 + bx + c = 0$ şeklinde yazınız.
- ◈ Denklemi çarpanlarına ayırarak köklerini bulunuz.
- ✷ Bulduğunuz kökler karenin kenar uzunluğu olabilir mi? Sebebini açıklayınız.
- ✷ Karenin bir kenar uzunluğu kaç birimdir?
- ✷ Dikdörtgenin kenar uzunlukları kaç birimdir?

ÖRNEK

$x^2 + 4x - 5 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

Denklemi çarpanlarına ayırmak için çarpımları – 5 ve toplamları 4 olan iki sayı bulalım.

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} x & 5 \\ x & -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -1 \cdot 5 = -5 \text{ ve } 5x - x = 4x \text{ olduğundan denklem,}$$

$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x + 5) \cdot (x - 1) = 0$ şeklinde çarpanlarına ayrılır.

$$x + 5 = 0 \quad \text{veya} \quad x - 1 = 0$$

$$x_1 = -5 \quad \text{ve} \quad x_2 = 1$$

$Ç = \{-5, 1\}$ bulunur.

ÖRNEK

$2x^2 + x - 10 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$$2x^2 + x - 10 = 0$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 2x & & 5 \\ & \times & \\ x & & -2 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 \cdot 5 = -10 \text{ ve } 5x - 4x = x \text{ olduğundan}$$

$2x^2 + x - 10 = 0 \Rightarrow (2x + 5) \cdot (x - 2) = 0$ olur.

$$2x + 5 = 0 \quad \text{veya} \quad x - 2 = 0$$

$$x_1 = \frac{-5}{2} \quad \text{ve} \quad x_2 = 2 \text{ ise}$$

$Ç = \left\{\frac{-5}{2}, 2\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$x^2 + 6x + 1 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$x^2 + 6x + 1$ ifadesinden $6x$ in katsayısının yarısının karesi olan 9 sayısı ifadeye bir eklenip bir çıkarılır.

$x^2 + 6x + 1 = 0$ denklemine 9 ekleyip çıkarırsak

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 3)^2 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 3)^2 - (\sqrt{8})^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 3 + \sqrt{8})(x + 3 - \sqrt{8}) = 0$$

$$\Rightarrow x + 3 + 2\sqrt{2} = 0 \text{ veya } x + 3 - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -3 - 2\sqrt{2} \text{ ve } x_2 = -3 + 2\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

$Ç = \{-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2}\}$ olur.

ÖRNEK

$x^2 + (1 - m)x + m = 0$ denkleminin bir kökü 3 ise m değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Denklemin bir kökü olan 3 değerini bu denklemde x yerine yazarsak

$3^2 + (1 - m) \cdot 3 + m = 0 \Rightarrow 9 + 3 - 3m + m = 0$

$-2m = -12$ ise $m = 6$ bulunur.

ÖRNEK

$x^2 - (m - 1)x - 3m = 0$ denkleminin köklerinden biri -2 ise diğer kökünü bulalım.

ÇÖZÜM

Denklemin bir kökü olan -2 değerini bu denklemde x yerine yazarsak

$x^2 - (m-1)x - 3m = 0 \Rightarrow (-2)^2 - (m-1)(-2) - 3m = 0 \Rightarrow 4 + 2m - 2 - 3m = 0 \Rightarrow m = 2$ bulunur,

Verilen denklemde m yerine 2 yazarsak

$x^2 - (2-1)x - 3 \cdot 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$ denklemini elde ederiz.

$x^2 - x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-3) = 0$

$\downarrow \quad \downarrow$ $\qquad x + 2 = 0$ veya $x - 3 = 0$

$x \quad +2$ $\qquad x_1 = -2$ ve $x_2 = 3$

$x \quad -3$ $\qquad$ O hâlde diğer kök, 3 tür.

$2x - 3x = -x$

ÖRNEK

$\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{4}{3}$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\underset{(x+1)}{\dfrac{1}{x-1}} + \underset{(x-1)}{\dfrac{1}{x+1}} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{x+1+x-1}{x^2-1} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{2}{3}$$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x+1)(x-2) = 0$

$\downarrow \quad \downarrow$ $\qquad 2x + 1 = 0$ veya $x - 2 = 0$

$2x \quad 1$ $\qquad x_1 = \dfrac{-1}{2}$ ve $x_2 = 2$ olur.

$x \quad -2$

$Ç = \left\{\dfrac{-1}{2}, 2\right\}$ bulunur.

3

ÖRNEK

$x^2 - 10x + 5 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$x^2 - 10x + 5 = 0$ denklemine 25 ekleyip çıkaralım.

$x^2 - 10x + 25 - 25 + 5 = 0$

$x^2 - 10x + 25 - 20 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 - 20 = 0$ denklemini buluruz.

$(x-5)^2 - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-5)^2 - (\sqrt{20})^2 = 0$

$\Rightarrow (x - 5 - 2\sqrt{5})(x - 5 + 2\sqrt{5}) = 0$

$\Rightarrow x - 5 - 2\sqrt{5} = 0$ veya $x - 5 + 2\sqrt{5} = 0$

$\Rightarrow x_1 = 5 + 2\sqrt{5}$ ve $x_2 = 5 - 2\sqrt{5}$ olur.

$Ç = \{5 - 2\sqrt{5}, 5 + 2\sqrt{5}\}$ bulunur.

Alıştırmalar 4-1

1) Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Denklem	1. dereceden bir bilinmeyenli iki denklemin çarpımı şeklinde yazılması	Denklemin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi
$x^2 - x - 20 = 0$	$(x-5)\cdot(x+4) = 0$	$Ç = \{-4, 5\}$
$4x^2 - 25 = 0$		
$5x^2 - 10x = 0$		
$27x = 3x^2$		
$3 - x^2 = 0$		
$x^2 + 4x + 3 = 0$		
$16 - x^2 = 0$		
$2x^2 - \frac{1}{2} = 0$		
$4x^2 = 0$		
$4x^2 - 28x + 49 = 0$		
$x^2 - 12x + 36 = 0$		

2) Sol sütunda verilen denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulup sağ sütundakilerle eşleştiriniz.

a) $x^2 - 5x = x$ ( )	1) $\{-1, 2\}$
b) $x^2 - x - 2 = 0$ ( )	2) $\left\{-3, \frac{3}{2}\right\}$
c) $2x^2 + 3x - 9 = 0$ ( )	3) $\left\{\frac{-1}{12}, \frac{1}{12}\right\}$
ç) $x^2 - 4x + 1 = 0$ ( )	4) $\{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$
d) $16x^2 - \frac{1}{9} = 0$ ( )	5) $\left\{\frac{1}{3}, 2\right\}$
e) $(3x-1)^2 = 4$ ( )	6) $\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$
f) $x^2 = 8 - \frac{x^2}{3}$ ( )	7) $\left\{\frac{-1}{3}, 1\right\}$
	8) $\{0, 6\}$

3) $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $2x^2 - mx + 3m - 1 = 0$ denkleminin bir kökü 2 ise m kaçtır?

4) $x^2 - mx - 3 = 0$ denkleminin bir kökü 1 ise diğer kökü kaçtır?

5) $x^2 - mx + n + 1 = 0$ denkleminin kökleri 1 ve –1 ise $m \cdot n$ kaçtır?

6) $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{8}{3}$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

7) Ahmet'in yaşı, Efe'nin yaşından, Efe'nin yaşının karesi kadar fazladır. Ahmet 20 yaşında olduğuna göre Efe'nin yaşını bulunuz.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Köklerini Veren Bağıntı

Bilgi

İkinci dereceden her denklemin köklerini, çarpanlara ayırma kurallarından yararlanarak bulamayabiliriz. Bunun için $ax^2+bx+c=0$ denkleminin köklerini kolaylıkla bulmamızı sağlayan bir bağıntı elde edelim.

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ax^2+bx+c=0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \text{ ....I}$$

$x^2+\frac{b}{a}x$ ifadesini tam kareye tamamlamak için $\frac{b^2}{4a^2}$ yi I ifadesine bir ekleyip bir de bu ifadeden çıkaralım.

$$\underbrace{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

$$x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \quad \text{veya} \quad x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{ve} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ bulunur.}$$

Bu durumda $ax^2+bx+c=0$ denkleminin çözüm kümesi $(a \neq 0)$

$$Ç=\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\} \text{ olur.}$$

$\mathbf{b^2-4ac}$ ifadesine denklemin **diskriminantı** denir ve "$\triangle$" sembolü ile gösterilir.

$\triangle = b^2-4ac$ olmak üzere

1) $\triangle > 0$ ise denklemin farklı iki gerçek kökü vardır. Bu kökler;

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}$ ve $x_2=\frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}$ eşitliği ile bulunur.

2) $\triangle = 0$ ise denklemin eşit (çakışık) iki gerçek kökü vardır. Bunlar;

$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$ eşitliği ile bulunur.

$\triangle = 0$ olması durumunda denklem bir tam karedir. Çözüm kümesi bir elemanlıdır.

3) $\triangle < 0$ ise denklemin gerçek kökü yoktur. Gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

ÖRNEK

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin çözümünü gerçek sayılar kümesinde bulalım.

ÇÖZÜM

Verilen denklemde $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$ dir. Denklemin diskriminantı

$\triangle = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$ olur.

$\triangle = 5 > 0$ olduğundan denklemin iki farklı gerçek kökü vardır.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ olur.}$$

O hâlde çözüm kümesi $Ç = \left\{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$4x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

I. yol: $4x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin diskriminantı,

$\triangle = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$

$\triangle = 0$ olduğundan denklemin birbirine eşit iki kökü vardır.

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ olur. $Ç = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ bulunur.

II. yol: $\underbrace{4x^2 - 4x + 1}_{} = 0$

$(2x-1)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ dir. $Ç = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$2x^2 - 2x + 3 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$2x^2 - 2x + 3 = 0$ denkleminin diskriminantı,

$\triangle = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20$

$\triangle = -20 < 0$ olduğundan denklemin gerçek kökleri yoktur. $Ç = \emptyset$ dir.

Etkinlik

Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri verilen denklemlere göre doldurunuz.

Denklem	a	b	c	$\triangle = b^2 - 4ac$	Birinci kök (x_1)	İkinci kök (x_2)
$x^2 - 6x + 7 = 0$						
$9x^2 - 12x + 4 = 0$						
$x^2 - 2x + 5 = 0$						

✷ Köklerin varlığı ve sayısı ile diskriminantı arasında nasıl bir ilişki vardır?

✷ İkinci dereceden her denklemin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesinin eleman sayısı hakkında ne söylenebilir?

ÖRNEK

$3x^2 - 2x + m - 1 = 0$ denkleminin eşit iki kökü varsa m değerini bulalım.

ÇÖZÜM

İkinci dereceden bir denklemin eşit iki kökü varsa $\triangle = 0$ olmalıdır.

$\triangle = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

$(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (m - 1) = 0$

$4 - 12m + 12 = 0 \Rightarrow 12m = 16$

$\Rightarrow m = \dfrac{16}{12} \Rightarrow m = \dfrac{4}{3}$ bulunur.

ÖRNEK

$2x^2 - 4x + m - 1 = 0$ denkleminin farklı iki gerçek kökü varsa m nin hangi aralıkta değer aldığını bulalım.

ÇÖZÜM

İkinci dereceden bir denklemin farklı iki gerçek kökü varsa $\triangle > 0$ olmalıdır.

$\triangle > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$

$(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m - 1) > 0$

$16 - 8m + 8 > 0$

$24 > 8m \Rightarrow m < 3$ olur. m nin değer aralığı $(-\infty, 3)$ bulunur.

ÖRNEK

$x^2 - 2x + 2m - 1 = 0$ denkleminin gerçek köklerinin bulunmaması için m nin hangi aralıkta değer aldığını bulalım.

ÇÖZÜM

İkinci dereceden bir denklemin gerçek köklerinin bulunmaması için $\triangle < 0$ olmalıdır.

$\triangle < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0$

$(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 1) < 0$

$4 - 8m + 4 < 0$

$8 < 8m \Rightarrow m > 1$ olur. m nin değer aralığı $(1, \infty)$ bulunur.

ÖRNEK

$(m + 1)x^2 + 4x + 2 = 0$ denkleminin gerçek kökü olmadığına göre m nin en küçük tam sayı değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Denklemin gerçek köklerinin olmaması için $\triangle < 0$ olmalıdır.

$\triangle < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0$

$4^2 - 4 \cdot (m + 1) \cdot 2 < 0$

$16 - 8m - 8 < 0$

$8 < 8m \Rightarrow m > 1$ olur. Bu durumda m nin en küçük tam sayı değeri 2 dir.

ÖRNEK

$(m - 2)x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminin farklı iki gerçek kökü olduğuna göre m nin alabileceği en büyük tam sayı değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Denklemin farklı iki gerçek kökü varsa $\triangle > 0$ olmalıdır.

$\triangle > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$

$(-6)^2 - 4 \cdot (m - 2) \cdot 1 > 0$

$36 - 4m + 8 > 0$

$44 > 4m \Rightarrow m < 11$ olduğundan m nin en büyük tam sayı değeri 10 olur.

Alıştırmalar 4-2

1) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun kelimelerle doldurunuz.

a) $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde .... ise farklı iki gerçek kök vardır.

b) Denklemin .... denklemi sağlar.

c) $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin derecesi .... dir.

ç) Bir denklemin köklerinin oluşturduğu küme .... dir.

2) Aşağıdaki cümlelerde bildirilen yargılar doğru ise yay ayraç içine "D", yanlış ise "Y" yazınız.

( ) İkinci dereceden $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $b^2 - 4ac = 0$ ise denklem bir tam karedir.

( ) Rasyonel katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin bir kökü $a + \sqrt{b}$ ise diğeri $a - \sqrt{b}$ dir.

( ) İkinci dereceden her denklemin gerçek sayılar kümesinde iki tane kökü vardır.

( ) İkinci dereceden $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $b^2 - 4ac < 0$ ise denklemin farklı iki gerçek kökü vardır.

( ) $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde a, b ve c gerçek sayıları denklemin katsayılarıdır.

3) $x^2 + (b - 1)x + c + 1 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi $\{-2, 3\}$ ise $b + c$ kaçtır?

4) $x^2 - 5x - 3m + 4 = 0$ denkleminin gerçek kökleri olmadığına göre m nin alabileceği değer aralığını bulunuz.

5) $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$ denklemin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi bir elemanlı ise m değerlerini bulunuz.

6) $3x^2 - x + m + 1 = 0$ denkleminin farklı iki gerçek kökü varsa m nin alabileceği değer aralığını bulunuz.

7) $x^2 - 2(m + 4)x + m^2 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi bir elemanlı ise m değerini bulunuz.

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

8) $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ denkleminin farklı iki gerçek kökü varsa m nin en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) –2

9) $x^2 - (m + 2)x + 2m = 0$ denkleminin çakışık iki gerçek kökünün olması için m aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?

A) –4 B) –2 C) 0 D) 2 E) 4

Karmaşık Sayılar

Belli türden denklemleri çözmek için bazı sayı kümeleri yetersizdir. Bu tür denklemlere çözüm bulmak için bilinen sayı kümelerinin dışında yeni sayı kümelerine ihtiyaç duyulmuştur.

- $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$ olur. Bu denklem doğal sayılar kümesinde çözülemediğinden tam sayılar kümesine ihtiyaç duyulmuştur.
- $3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ olur. Bu denklem tam sayılar kümesinde çözülemediğinden rasyonel sayılar kümesine ihtiyaç duyulmuştur.
- $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}$ olur. Bu denklem rasyonel sayılar kümesinde çözülemediğinden gerçek sayılar kümesine ihtiyaç duyulmuştur.

$x^2 + 9 = 0$ ve $x^2 + x + 2 = 0$ denklemlerinin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulalım.

$x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9$ olur. Gerçek sayılar kümesinde karesi –9 olan bir sayı bulunmadığından $x^2 + 9 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesi $\varnothing$ olur.

$x^2 + x + 2 = 0$ denkleminin diskriminantı $\triangle = -7 < 0$ olduğundan denklemin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi $\varnothing$ olur.

O hâlde gerçek sayılar kümesinin genişletilerek içinde bu tür denklemlerin de çözülebildiği daha büyük bir sayı kümesine ihtiyaç duyulmuştur. Bu kümeye karmaşık sayılar kümesi denir ve $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

Bilgi

$\sqrt{-1}$ sayısına **sanal (imajiner) sayı birimi** denir ve *i* ile gösterilir.

$i = \sqrt{-1}$ veya $i^2 = -1$ dir.

$a > 0$ olmak üzere $\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a} \cdot i = i \cdot \sqrt{a}$ dır.

ÖRNEK

$\sqrt{-1} = i$ olduğuna göre $\sqrt{-9}, \sqrt{-5}, \sqrt{\frac{-16}{25}}$ ve $\sqrt{-8}$ sayılarını sanal sayı birimi cinsinden yazalım.

ÇÖZÜM

- $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3\sqrt{-1} = 3i$
- $\sqrt{-5} = \sqrt{5 \cdot (-1)} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{5}\,i$
- $\sqrt{\frac{-16}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} \cdot \sqrt{-1} = \frac{4}{5}i$
- $\sqrt{-8} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{2}\,i$

Bilgi

$i = \sqrt{-1} = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = (i^2)^3 = -1$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$

$i^8 = (i^4)^2 = 1$

$i^9 = i^8 \cdot i = i$

$i^{10} = (i^2)^5 = -1$

....

....

Yanda elde ettiğimiz sonuçlara göre i nin tam sayı kuvvetlerinde her dört kuvvette bir aynı değerlere ulaşıldığını ve ***i*, – 1, – *i*, 1** dörtlüsünün tekrarlandığını görürüz.

Bilgi

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$i^k = \begin{cases} 1, & k = 4n \\ i, & k = 4n + 1 \\ -1, & k = 4n + 2 \\ -i, & k = 4n + 3 \end{cases}$$

biçiminde yazabiliriz ya da $m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $i^{4n+m} = i^m$ biçiminde gösterebiliriz.

ÖRNEK

$\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-16} \cdot \sqrt{-25} \cdot \sqrt{-1}$ işleminin sonucunu bulalım.

ÇÖZÜM

$\sqrt{-9} = 3i$, $\sqrt{-16} = 4i$, $\sqrt{-25} = 5i$ ve $\sqrt{-1} = i$ olduğuna göre

$\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-16} \cdot \sqrt{-25} \cdot \sqrt{-1} = 3i \cdot 4i \cdot 5i \cdot i = 60 \cdot 1 = 60$ bulunur.

Alıştırmalar 4-3

1) Sol sütundaki sayıları sağ sütundaki değerler ile eşleştiriniz.

a) $\sqrt{-169}$ ( )	1) $\frac{6i}{11}$
b) $\sqrt{-\frac{36}{121}}$ ( )	2) $14i$
c) $\sqrt{-15}$ ( )	3) $4\sqrt{3}\,i$
ç) $\sqrt{-48}$ ( )	4) $13i$
	5) $\sqrt{15}\,i$

2) $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{-5}}{5}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Bilgi

$i^2 = -1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a + bi$ biçiminde ifade edilen sayılara **karmaşık sayılar** denir.

Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir ve $\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}$ dir.

$z = a + bi$ yazılışına, karmaşık sayının **standart yazılışı** denir.

a gerçek sayısına, z karmaşık sayısının **gerçek (reel) kısmı** denir. $\mathbf{Re(z) = a}$ ile gösterilir.

b gerçek sayısına, z karmaşık sayısının **sanal (imajiner) kısmı** denir. $\mathbf{İm(z) = b}$ ile gösterilir.

ÖRNEK

Aşağıdaki karmaşık sayıların gerçek ve sanal kısımlarını bulalım.

ÇÖZÜM

a) $z_1 = -2 + \frac{1}{3}i \Rightarrow \text{Re}(z_1) = -2$ ve $\text{İm}(z_1) = \frac{1}{3}$

b) $z_2 = \sqrt{3} - \sqrt{5}\,i \Rightarrow \text{Re}(z_2) = \sqrt{3}$ ve $\text{İm}(z_2) = -\sqrt{5}$

c) $z_3 = 4 \Rightarrow \text{Re}(z_3) = 4$ ve $\text{İm}(z_3) = 0$

ç) $z_4 = 2i \Rightarrow \text{Re}(z_4) = 0$ ve $\text{İm}(z_4) = 2$ bulunur.

Bilgi

Her gerçek sayı $a + 0 \cdot i$ biçiminde yazılabilir. Bu yüzden gerçek sayılar kümesi karmaşık sayılar kümesinin bir alt kümesidir.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Bir Karmaşık Sayının Eşleniği

Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = a + bi$ karmaşık sayısının sanal kısmının işareti değiştirilerek elde edilen $a - bi$ karmaşık sayısına **z karmaşık sayısının eşleniği** denir. z karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z}$ ile gösterilir. $\mathbf{z = a + bi}$ ise $\mathbf{\overline{z} = a - bi}$ olur.

ÖRNEK

Aşağıdaki karmaşık sayıların eşleniklerini bulalım.

a) $z_1 = 3 + 5i$ **b)** $z_2 = -4i - 1$ **c)** $z_3 = \frac{1}{2}$ **ç)** $z_4 = -2i$

ÇÖZÜM

a) $z_1 = 3 + 5i$ ise $\overline{z_1} = 3 - 5i$

b) $z_2 = -4i - 1$ ise $\overline{z_2} = 4i - 1$

c) $z_3 = \frac{1}{2}$ ise $\overline{z_3} = \frac{1}{2}$

ç) $z_4 = -2i$ ise $\overline{z_4} = 2i$ olur.

ÖRNEK

$z = 5 - 7i$ karmaşık sayısının eşleniğinin eşleniğini bulalım.

ÇÖZÜM

$z = 5 - 7i \Rightarrow \overline{z} = 5 + 7i \Rightarrow \overline{(\overline{z})} = 5 - 7i = z$ olur.

Bilgi

Bir karmaşık sayının eşleniğinin eşleniği kendisine eşittir. $\mathbf{\overline{(\overline{z})} = z}$

ÖRNEK

$x^2 - 2x + 2 = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$a = 1$, $b = -2$, $c = 2$ olan denklemde,

$\triangle = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$ olduğundan denklemin gerçek kökü yoktur. $\triangle < 0$ durumunda denklemin karmaşık iki kökü vardır.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i \text{ bulunur.}$$

$Ç = \{1 - i, 1 + i\}$ olur. $1 - i$ ve $1 + i$ karmaşık sayılarının birbirinin eşleniği olduğuna dikkat ediniz.

Etkinlik

$x^2 - 2x + 10 = 0$ denkleminin;

◈ Diskriminantını ve karmaşık sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

◈ Köklerini birbiriyle karşılaştırınız.

✷ Bulduğunuz kökler hangi sayı kümesinin elemanlarıdır? Neden?

ÖRNEK

$x^2 + 3x + 5 = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$\triangle = b^2 - 4ac \Rightarrow \triangle = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$

$\triangle < 0$ olduğundan denklemin karmaşık köklerini bulalım.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{-11}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 + \sqrt{11}\,i}{2} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{-11}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 - \sqrt{11}\,i}{2}$$

$$Ç = \left\{\frac{-3 - \sqrt{11}\,i}{2}, \frac{-3 + \sqrt{11}\,i}{2}\right\} \text{ bulunur.}$$

Bilgi

Gerçek katsayılı ikinci dereceden bir denklemde $\triangle < 0$ iken kökler birbirinin eşleniğidir. Köklerden biri $a - bi$ ise diğeri $a + bi$ dir.

Bilgi

Gerçek katsayılı ikinci dereceden bir denklemde $\triangle < 0$ iken kökler birbirinin eşleniğidir. Köklerden biri $a - bi$ ise diğeri $a + bi$ dir.

ÖRNEK

$4x^2 + 25 = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesindeki köklerini bulalım.

ÇÖZÜM

$4x^2 + 25 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{-25}{4}$ $\quad x = \sqrt{\dfrac{-25}{4}} \Rightarrow x_1 = \dfrac{5i}{2}$ ve $x_2 = \dfrac{-5i}{2}$ olduğundan

$Ç = \left\{\dfrac{-5i}{2}, \dfrac{5i}{2}\right\}$ bulunur.

Alıştırmalar 4-4

1) Aşağıdaki tablolarda boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz.

z	Re(z)	Im(z)
$2 + 5i$		
$3 - i$		
	$\sqrt{3}$	1
	2	0
$\dfrac{2-i}{3}$		
$\sqrt{2} + 3$		
	0	–1

z	$\bar{z}$
$-6 - i$	
$-1 - i$	
	$8 - i$
7	
	$\dfrac{i-1}{2}$
	$-9i$
$\sqrt{2} - 1$	

2) Aşağıdaki denklemlerle karmaşık sayılar kümesindeki çözüm kümelerini eşleştiriniz.

a) $x^2 - 2x + 5 = 0$ (   )

b) $x^2 - 6x + 13 = 0$ (   )

c) $x^2 + \dfrac{1}{2} = 0$ (   )

ç) $x^2 + 4x + 6 = 0$(   )

1) $\left\{-\dfrac{1}{2}i, \dfrac{1}{2}i\right\}$

2) $\{1 + 2i, 1 - 2i\}$

3) $\{3 - 2i, 3 + 2i\}$

4) $\{-2 - \sqrt{2}\,i, -2 + \sqrt{2}\,i\}$

5) $\left\{\dfrac{-\sqrt{2}}{2}i, \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Kökleri İle Katsayıları Arasındaki İlişkiler

Bilgi

$a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin x_1, x_2 kökleri ile a, b, c katsayıları arasındaki bağıntılar yardımıyla denklemin köklerini bulmadan, köklerin toplamını ve çarpımını bulabiliriz.

$a \neq 0$ ve $\triangle > 0$ için $ax^2 + bx + c = 0$ denklemin farklı iki gerçek kökü olan

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}$ ve $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}$ ifadelerini toplayalım.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-b+\cancel{\sqrt{\triangle}}-b-\cancel{\sqrt{\triangle}}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \text{ olur.}$$

O hâlde ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin köklerinin toplamını $\mathbf{x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}}$ bağıntısı ile bulabiliriz.

Bir de x_1 ve x_2 köklerini çarpalım.

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}\right) = \frac{b^2-\triangle}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \text{ olur.}$$

Bu durumda ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin köklerinin çarpımını $\mathbf{x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}}$ bağıntısı ile bulabiliriz.

ÖRNEK

Aşağıdaki denklemlerin kökler toplamını ve çarpımını bulalım.

a) $3x^2 - 8x + 2 = 0$ **b)** $-2x^2 - 5x + 4 = 0$ **c)** $4x^2 + 3 = 0$

ÇÖZÜM

a) $3x^2 - 8x + 2 = 0$ ise $a = 3,\ b = -8,\ c = 2$ olduğundan

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-8)}{3} = \frac{8}{3} \text{ ve } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

b) $-2x^2 - 5x + 4 = 0$ ise $a = -2,\ b = -5,\ c = 4$ olduğundan

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{-2} = \frac{-5}{2} \text{ ve } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{-2} = -2 \text{ olur.}$$

c) $4x^2 + 3 = 0$ denklemi için $a = 4,\ b = 0,\ c = 3$ ise

$$x_1 + x_2 = \frac{0}{4} = 0 \text{ ve } x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{4} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$3x^2 - 2mx - 2 = 0$ denkleminin kökler toplamı 2 ise m değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2 \Rightarrow \frac{-(-2m)}{3} = 2 \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3$ bulunur.

ÖRNEK

$2x^2 - 6x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $\frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3}$ ifadesinin eşitini bulalım.

ÇÖZÜM

Verilen denklemin köklerinin toplamı $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{-6}{2} = 3$ ve

Köklerinin çarpımı $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$ olur.

$\frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3} = \frac{x_2 + 3 + x_1 + 3}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)} = \frac{x_1 + x_2 + 6}{x_1 \cdot x_2 + 3x_1 + 3x_2 + 9} = \frac{3 + 6}{2 + 3 \cdot 3 + 9} = \frac{9}{20}$ bulunur.

Etkinlik

Tabloda verilen denklemin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Denklem	a	b	c	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$\frac{-b}{a}$	$x_1 \cdot x_2$	$\frac{c}{a}$
$x^2 - 5x + 6 = 0$									

◈ $x_1 + x_2$ ile $\frac{-b}{a}$ sonuçlarını karşılaştırınız.

◈ $x_1 \cdot x_2$ ile $\frac{c}{a}$ sonuçlarını karşılaştırınız.

ÖRNEK

$mx^2 + (m - 1)x - 4m = 0$ denkleminin iki simetrik kökü olduğuna göre bu kökleri bulalım.

ÇÖZÜM

Denklemin iki simetrik kökü varsa $x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$ dır.

$x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 0 \Rightarrow \dfrac{-(m-1)}{m} = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$ olur.

Verilen denklemde m yerine 1 yazarsak

$1 \cdot x^2 + (1 - 1)x - 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ denklemini elde ederiz.

Buradan, $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2$ ve $x_2 = 2$ bulunur.

İstenilen kökler –2 ve 2 dir.

ÖRNEK

$2x^2 + 2mx + m - 1 = 0$ denkleminin kökler toplamı, kökler çarpımının 2 katı ise m değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$x_1 + x_2 = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \Rightarrow \dfrac{-b}{\cancel{a}} = 2 \cdot \dfrac{c}{\cancel{a}} \Rightarrow -2m = 2 \cdot (m - 1)$

$\Rightarrow -m = m - 1 \Rightarrow 1 = m + m \Rightarrow 2m = 1 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$ olur.

ÖRNEK

$\dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{1}{x} = 1$ denkleminin kökler toplamını bulalım.

ÇÖZÜM

Önce denklemi düzenleyelim.

$\dfrac{2x}{\underset{(x)}{x+1}} - \dfrac{1}{\underset{(x+1)}{x}} = 1 \Rightarrow \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x} = 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = x^2 + x$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$ denklemi bulunur.

$\Rightarrow x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = \dfrac{2}{1} = 2$ olur.

ÖRNEK

$x^2-5x-m+2=0$ denkleminin x_1 ve x_2 kökleri arasında $3x_1-x_2=3$ bağıntısı varsa m değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-(-5)}{1}=5$ ise $3x_1-x_2=3$ ile $x_1+x_2=5$ ifadelerini taraf tarafa toplayalım.

$$\left.\begin{aligned}3x_1-\cancel{x_2}&=3\\x_1+\cancel{x_2}&=5\end{aligned}\right\}\Rightarrow 4x_1=8\Rightarrow x_1=2$$

Denklemin köklerinden biri 2 ise denklemi sağlar.

$2^2-5\cdot2-m+2=0\Rightarrow 4-10-m+2=0\Rightarrow m=-4$ bulunur.

ÖRNEK

$3x^2-3x+4=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $x_1^2\cdot x_2+x_1\cdot x_2^2$ ifadesinin değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$x_1^2\cdot x_2+x_1\cdot x_2^2$ ifadesini $x_1\cdot x_2$ ortak çarpan parantezine alalım.

$x_1^2\cdot x_2+x_1\cdot x_2^2=x_1\cdot x_2\,(x_1+x_2)=\frac{c}{a}\cdot\frac{-b}{a}=\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{-3}{3}\right)=\frac{4}{3}\cdot1=\frac{4}{3}$ bulunur.

ÖRNEK

$mx^2-(m+3)x+4m+5=0$ denkleminin köklerinin aritmetik ortalaması 2 ise geometrik ortalamasını bulalım.

ÇÖZÜM

Verilen denklemin köklerinin aritmetik ortalaması 2 ise

$\frac{x_1+x_2}{2}=2\Rightarrow x_1+x_2=4$ tür.

$$\Rightarrow\frac{-b}{a}=\frac{-(-(m+3))}{m}=4\Rightarrow 4m=m+3\Rightarrow m=1 \text{ olur.}$$

x_1 ve x_2 köklerinin geometrik ortalaması $\sqrt{x_1\cdot x_2}$ dir.

$\sqrt{x_1\cdot x_2}=\sqrt{\frac{c}{a}}=\sqrt{\frac{4m+5}{m}}=\sqrt{\frac{4\cdot1+5}{1}}=\sqrt{9}=3$ bulunur.

Kökleri Verilen İkinci Dereceden Denklemin Yazılması

Bilgi

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Denklemin her iki tarafını $\frac{1}{a}$ ile çarpalım. $\frac{1}{a}(ax^2 + bx + c) = \frac{1}{a} \cdot 0$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - \underbrace{\left(\frac{-b}{a}\right)}_{x_1 + x_2}x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{x_1 \cdot x_2} = 0$$

Kökler toplamını T ve kökler çarpımını Ç ile gösterelim.

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ şeklinde veya $x^2 - Tx + Ç = 0$ şeklinde yazılır.

ÖRNEK

Aşağıda çözüm kümeleri verilen ikinci dereceden denklemleri yazalım.

a) $\{-2, 3\}$ **b)** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **c)** $\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$

ÇÖZÜM

a) $T = x_1 + x_2 = -2 + 3 = 1$

$Ç = x_1 \cdot x_2 = -2 \cdot 3 = -6$ ise $x^2 - Tx + Ç = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

b) $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$ olduğundan $x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$

$$x^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)x + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = 0 \text{ ise } x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$ bulunur.

c) $T = x_1 + x_2 = 1 - \cancel{\sqrt{3}} + 1 + \cancel{\sqrt{3}} = 2$

$Ç = x_1 \cdot x_2 = (1 - \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3}) = 1^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 - 3 = -2$ ise

$x^2 - Tx + Ç = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$ olur.

Etkinlik

1.	2.	3.	4.	5.	6.
Denklem	Denklemin Kökleri		Çözüm Kümesi	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
	x_1	x_2			
$x^2 - 4x - 21 = 0$	–3	7	$\{-3, 7\}$	4	–21
$x^2 + 8x + 16 = 0$	–4	–4	$\{-4\}$	–8	16
$x^2 - 3x + 2 = 0$	....	....	$\{1, 2\}$	....	....
....	–3	3	$\{-3, 3\}$	0	–9
$x^2 - 2x = 0$	0	....	....	....	....

Yukarıdaki tabloda boş bırakılan yerleri örneklere göre uygun şekilde doldurunuz.

◈ Tabloda 1, 5 ve 6. sütunların birbirleriyle ilişkisini inceleyiniz.

◈ Çözüm kümesi verilen bir ikinci dereceden denklemi yazmak için nelere dikkat etmek gerektiğini açıklayınız.

Bilgi

Rasyonel katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin bir kökü $a + \sqrt{b}$ ise diğer kökü $a - \sqrt{b}$ dir.

ÖRNEK

Köklerinden biri $3 - \sqrt{5}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden denklemi yazalım.

ÇÖZÜM

$x_1 = 3 - \sqrt{5}$ ise $x_2 = 3 + \sqrt{5}$ olur.

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - \left(3 + \cancel{\sqrt{5}} + 3 - \cancel{\sqrt{5}}\right) \cdot x + \left(3 + \sqrt{5}\right) \cdot \left(3 - \sqrt{5}\right) = 0$$

$$x^2 - 6x + \left(9 - \cancel{3\sqrt{5}} + \cancel{3\sqrt{5}} - 5\right) = 0$$

$x^2 - 6x + 4 = 0$ bulunur.

ÖRNEK

Karmaşık köklerinden biri $5-2i$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden denklemi yazalım.

ÇÖZÜM

Köklerinden biri $5-2i$ ise diğeri $5+2i$ olur.

$x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=0$

$x^2-(5-\cancel{2i}+5+\cancel{2i})x+(5-2i)\cdot(5+2i)=0$

$x^2-10x+5^2+2^2=0 \Rightarrow x^2-10x+29=0$ bulunur.

ÖRNEK

Köklerinden biri $\dfrac{1}{-\sqrt{5}+2}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden denklemi yazalım.

ÇÖZÜM

$x_1=\dfrac{1}{\underset{(2+\sqrt{5})}{2-\sqrt{5}}}=\dfrac{2+\sqrt{5}}{4-5}=\dfrac{2+\sqrt{5}}{-1}=-2-\sqrt{5}$ ise

$x_2=-2+\sqrt{5}$ olur.

$x^2-(-2-\cancel{\sqrt{5}}-2+\cancel{\sqrt{5}})x+(-2-\sqrt{5})(-2+\sqrt{5})=0$

$x^2+4x-1=0$ bulunur.

Alıştırmalar 4-5

1) Aşağıdaki tabloda verilen denklemlere göre boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Denklem	a	b	c	x_1+x_2	$x_1\cdot x_2$
$4x^2+3x-2=0$					
$-x^2+5x-1=0$					
$2x^2+7x-3=0$					
$x^2-6x+9=0$					

2) Kökleri x_1 ve x_2 olan aşağıdaki denklemler için istenenleri bulunuz.

a) $3x^2 - x + 1 = 0$ ise $x_1 + x_2 =$ ....

b) $x^2 - 8x + 2 = 0$ ise $x_1 \cdot x_2 =$ ....

c) $-x^2 - 2x - 1 = 0$ ise $\dfrac{3}{x_1 - 2} + \dfrac{3}{x_2 - 2} =$ ....

ç) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ ise $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 =$ ....

3. Aşağıda kökleri verilen ikinci dereceden denklemleri bulunuz.

a) $x_1 = 8$ ve $x_2 = 3$

b) $x_1 = \dfrac{2}{3}$ ve $x_2 = \dfrac{-1}{2}$

c) $x_1 = \sqrt{2}$ ve $x_2 = -\sqrt{2}$

ç) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ ve $x_2 = 1 + \sqrt{2}$

4) Köklerinden biri $2\sqrt{2} + 1$ olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

5) $3x^2 - 8x - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise çözüm kümeleri aşağıda verilen ikinci dereceden denklemleri yazınız.

a) $\left\{\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}\right\}$

b) $\{x_1 + 2, x_2 + 2\}$

c) $\{3x_1 + 1, 3x_2 + 1\}$

6) $x^2 - 2mx + 2 = 0$ denkleminin köklerinin aritmetik ortalaması geometrik ortalamasına eşit ise m kaçtır?

7) $2x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ kaçtır?

8) $x^2 + 3x + m - 1 = 0$ denkleminin kökler toplamı kökler çarpımına eşit ise m kaçtır?

9) $x^2 - 4x - 4 = 0$ denkleminin köklerinin üçer eksiğinin çarpımı kaçtır?

A) 19
B) 17
C) –25
D) –10
E) –7

10) $(m - 2)x^2 + 4mx - 4m + 1 = 0$ denkleminin kökler çarpımı 3 ise m kaçtır?

A) –2
B) –1
C) 0
D) 1
E) 2

11) $mx^2 - 8x + m + 4 = 0$ denkleminin kökleri arasında $x_1 = \dfrac{3}{x_2}$ bağıntısı varsa m kaçtır?

A) 4
B) 2
C) –2
D) $\dfrac{4}{3}$
E) –4

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

1) $P(x) = 3x^2 - 2x^{2a-b} + 3b - 2$ polinomu 4. dereceden ve sabit terimi 4 olan bir polinom ise $a - b$ kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2) $der[P(x) \cdot Q(x)] = 9$ ve $der\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = 5$ olmak üzere $P[Q(x)]$ polinomunun derecesi kaçtır?

A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

3) $P(x) = (a - b)x^2 + (a - 5)x + 3a - 2b$ polinomu sabit polinom olduğuna göre $P(2)$ kaçtır?

A) –10 B) –5 C) 0 D) 5 E) 10

4) $P(x) = (a - 1)x^2 + bx + 4$ ve $Q(x) = (3x - 2)^2$ polinomları için $P(x) = Q(x)$ olduğuna göre $a + b$ kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) –2

5) $P(x) = (a - 2)x^3 + (b + 2)x + c - 2a + b$ ifadesi sıfır polinom olduğuna göre c kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

6) $P(x) + P(x + 3) = 4x + 12$ olduğuna göre $P(5)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

7) $P(3x - 1) = (x^2 + 1) \cdot Q(2x + 1) + 5x + 2$ olmak üzere $Q(x)$ in $x - 3$ ile bölümünden kalan –1 ise $P(x)$ in $x - 2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

8) $(x - 2) \cdot P(x) = x^2 + mx + n$ eşitliğini sağlayan $P(x)$ polinomu için $2m + n$ kaçtır?

A) –4 B) –2 C) 0 D) 2 E) 4

9) $P(x) = x^{12} + 3x^{11} + ax^2 - 36$ polinomunun çarpanlarından biri $x + 3$ ise a kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

10) $(x^4 + ax^3 + x^2 + 1)(2x^3 + 3x^2 - 1)$ çarpımında x^6 lı terimin katsayısı 1 ise a kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

11) $P(x + 3) = x^3 + 3x^2 - x - 2$ olmak üzere $P(x) + P(x + 1)$ polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12) $P(2x - 3) = 4x^2 - 2x + 1$ olmak üzere $P(x)$ polinomu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 - 5x + 7$ B) $x^2 - 2x + 1$ C) $x^2 + 5x + 7$ D) $x^2 - 2x + 7$ E) $x^2 + 2x + 1$

13) $P(x) = 3x^2 + mx + 5$ polinomu veriliyor. $P(x)$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan 9 ise $x + 1$ bölümünden kalan kaçtır?

A) 12 B) 10 C) 0 D) –10 E) –12

14) $P(x) = (x^2 - 1)^{4-n} + (x^3 + 1)^{n-1}$ polinomunun derecesinin alacağı kaç **farklı** değer vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15) $P(x + 4) + 2 \cdot P(x - 1) = 6x - 2$ olmak üzere $P(x)$ in $x - 3$ ile bölümünden kalan 2 ise $P(x)$ in $x + 2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 2 B) –2 C) –4 D) –5 E) –6

16) $(x - 2) \cdot P(x + 1) = 2x^2 - 7x + m$ olmak üzere, $P(x - 2)$ polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) – 3 D) – 6 E) – 7

17) $\dfrac{P(2x + 3) + ax - 2}{Q(x + 1)} = 4x + 3$ ifadesi veriliyor. $P(x)$ in $x - 1$ ile bölümünden kalan 5, $Q(x)$ in x ile bölümünden kalan –2 ise a kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 3

18) $2x^3 + mx^2 - 2x + 3m + 1 = Q(x - 1)$ eşitliğini sağlayan $Q(x)$ polinomunun sabit terimi 5 ise katsayılar toplamı kaçtır?

A) 7 B) 9 C) 10 D) 12 E) 20

19) $\dfrac{4x + (x + 1) \cdot Q(x + 1)}{P(x - 1)} = x^2 - x - 2$ bağıntısı veriliyor. $Q(x)$ in bir çarpanı $(x - 2)$ olduğuna göre $P(x)$ in sabit terimi kaçtır?

A) – 4 B) – 2 C) 2 D) 4 E) 6

20) $x = 3,28$ ve $y = 1,72$ ise $(x - y)^2 + 4xy$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 20 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

21) $a = 0,2, b = 0,3$ ise $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$ cebirsel ifadesinin eşiti kaçtır?

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{8}$ C) $\dfrac{1}{16}$ D) $\dfrac{1}{32}$ E) $\dfrac{1}{64}$

22) $x - y = y - z = 3$ olduğuna göre $x^2 + z^2 - 2y^2$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 18 E) 27

23) $x, y \in \mathbb{R}, x + y + \sqrt{xy} = 4,\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 36$ olduğuna göre $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

24) $x, y \in \mathbb{R}, x^3 - y^3 = 50$ ve $x - y = 2$ ise $x \cdot y$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

25) $P(x) = x^4 - 7x^2 + 9$ polinomunun çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 - x + 3$ B) $x^2 + x - 3$ C) $x^2 + x + 3$ D) $x^2 + 3$ E) $x^2 + x$

26) $\dfrac{x^2 - 9y^2}{x^2 + 3xy} : \dfrac{x^3 - 27y^3}{x^3 + 3x^2y + 9xy^2}$ rasyonel ifadesi aşağıdaki ifadelerden hangisine eşittir?

A) 1 B) x C) $x - 1$ D) $x + 1$ E) $x - 3y$

27) $\dfrac{x+1}{x} - \left(\dfrac{1}{x} : \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}\right)$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) $x + 1$ C) 0 D) $x - 1$ E) $1 - x$

28) $x \in \mathbb{R}$, $2x + \dfrac{3}{x} = 4$ olduğuna göre $4x^2 + \dfrac{9}{x^2}$ ifadesinin sonucu kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

29) $x, a, b \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 - 2x - 8}$ rasyonel ifadesinin en sade hâli $\dfrac{x+5}{x-4}$ olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) 50 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

30) $\dfrac{x^2 + 2x(1-y) - 4y}{x^2 + x(1-2y) - 2y}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1-y}{1-2y}$ B) $\dfrac{x-2y}{x-y}$ C) $\dfrac{x+2}{x+1}$ D) $\dfrac{y+2}{y+1}$ E) $\dfrac{x-y}{x+y}$

31) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{-1}{4}$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{\dfrac{5}{4}, 3\right\}$ B) $\{3, 4\}$ C) $\{3\}$ D) $\left\{\dfrac{4}{5}, -3\right\}$ E) $\left\{\dfrac{-4}{5}, 3\right\}$

32) $\sqrt{2x+1} - x + 1 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{0\}$ B) $\{1\}$ C) $\{1, 4\}$ D) $\{4\}$ E) $\{0, 4\}$

33) $2x^2 - 6x + c = 0$ denkleminin köklerinden biri 2 ise diğeri kaçtır?

A) 1 B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{5}{2}$ D) 3 E) 4

34) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{9 - 3x} = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1, 3\}$ B) $\{-1, 3\}$ C) $\{1\}$ D) $\{-1, -3\}$ E) $\{3\}$

35) Aşağıdaki denklemlerden hangisinin eşit iki gerçek kökü vardır?

A) $x^2 - 2x - 3 = 0$ B) $x^2 - 4 = 0$ C) $x^2 - 4x + 4 = 0$
D) $x^2 - 2x + 5 = 0$ E) $x^2 + x = 0$

36) $x^2 - 2x + 1 - a = 0$ denkleminin gerçek kökü olmadığına göre a nın alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

37) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$ denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sqrt{5} - 2$ B) $\sqrt{5} + 1$ C) $2\sqrt{5}$ D) $\sqrt{5} - 2$ E) $2\sqrt{5} - 1$

38) $i^2 = -1$ olmak üzere $z = \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-27} + \sqrt{-4}$ karmaşık sayısının gerçek ve sanal kısmının toplamı kaçtır?

A) –7 B) –4 C) –1 D) 3 E) 7

39) $c \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + c = 0$ denkleminin köklerinden biri $1 - 2i$ ise c sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

40) Köklerinden biri $-2 - 3i$ olan gerçek katsayılı ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 - 4x + 13 = 0$ B) $x^2 + 4x + 13 = 0$ C) $x^2 - 4x + 5 = 0$
D) $x^2 + 4x + 5 = 0$ E) $x^2 + 4x + 10 = 0$

41) $x^2 - 2x + 6 = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-1 + \sqrt{5}i, -1 - \sqrt{5}i\}$ B) $\{2 - \sqrt{5}i, -2 + \sqrt{5}i\}$ C) $\{-\sqrt{5}i, \sqrt{5}i\}$
D) $\{1 - 5i, 1 + 5i\}$ E) $\{1 - \sqrt{5}i, 1 + \sqrt{5}i\}$

42) $mx^2 - 3x + 9 = 0$ ve $(m - 1)x^2 - 2x + n = 0$ denklemlerinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümeleri aynı olduğuna göre $m + n$ kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

43) $3x^2 + 5x - m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $3x_1 - x_2 = 3$ olduğuna göre m kaçtır?

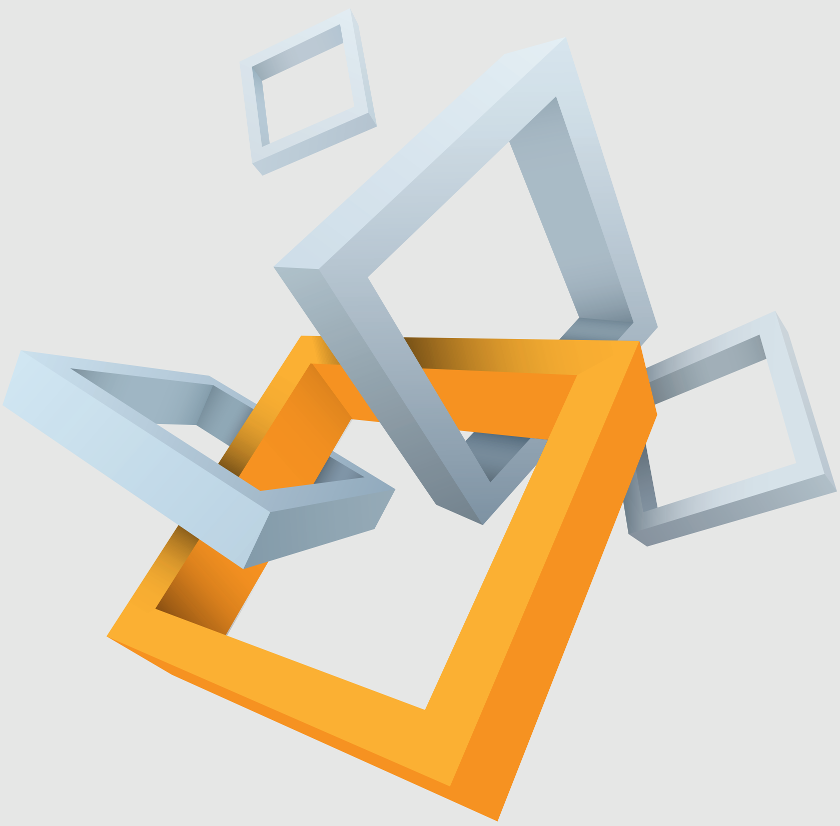
A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) –2

44) $x^2 - (m + 3)x + 8 - m = 0$ denkleminin kökler toplamı 5 ise kökler çarpımı kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

4

ÇOKGENLER VE UZAY GEOMETRİ



5. DÖRTGENLER VE ÇOKGENLER

5.1. Çokgenler

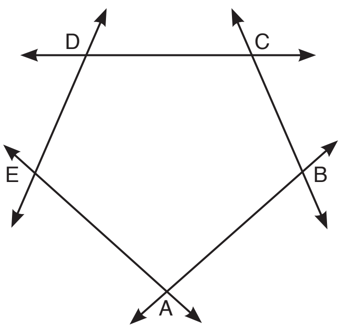
Her devirde evlerimizin vazgeçilmez eşyası olan halı ve kilim ilk defa Orta Asya'da Türkler tarafından imal edilmiştir. Asırlar boyunca süren imalat, kaliteyi geliştirdiği gibi halıyı ve kilimi güzel sanatların önemli kollarından biri hâline getirmiştir. Ayrıca özellikle kilimler, otantik mekânlar dizayn etmede çok önemli bir yer tutar. Günümüzde halı ve kilimler genellikle dikdörtgen şeklindedir. Halı ve kilimlerin dikdörtgen şeklinde olmasının bir sebebi de serilen mekânların aynı geometrik şekle sahip olmasıdır.

Farklı bir dörtgen şekle sahip kilimin alanı nasıl hesaplanıyor olabilir?

Bilgi

$n \geq 3$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aynı düzlemde herhangi üç tanesi doğrusal olmayan

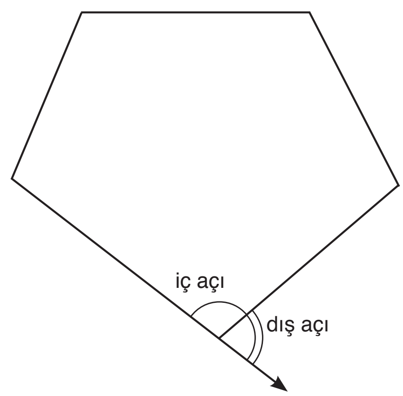
$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ noktalarını $[A_1, A_2], [A_2, A_3], \ldots, [A_n, A_1]$ biçiminde birleştiren doğru parçalarının birleşimine **çokgen** denir.



Dışbükey (konveks)

Çokgenin hiçbir kenarının uzantısı diğer kenarı kesmiyorsa bu çokgene **dışbükey (konveks) çokgen** denir.

Çokgende ardışık iki kenar arasında ve çokgenin iç bölgesinde kalan açılara çokgenin **iç açıları**, çokgenin iç açılarını bütünleyen her bir açıya da çokgenin **dış açıları** denir. Çokgende komşu olmayan herhangi iki köşeyi birleştiren doğru parçasına çokgenin **köşegeni** denir.



Bilgi

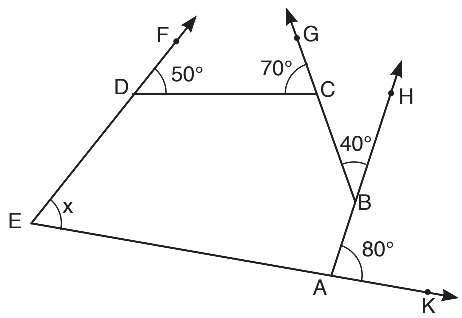
$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ ve n, çokgenin kenar sayısı olmak üzere

1) Çokgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı $(n-2) \cdot 180°$ dir.

2) Çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı $360°$ dir.

ÖRNEK

ABCDE, bir beşgendir. $m(\widehat{FDC}) = 50°$, $m(\widehat{GCD}) = 70°$, $m(\widehat{CBH}) = 40°$ ve $m(\widehat{BAK}) = 80°$ olduğuna göre $m(\widehat{AED})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

Beşgenin dış açılarının ölçüleri 50°, 70°, 40°, 80° ise iç açıları sırasıyla 130°, 110°, 140°, 100° dir.

Beşgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(5-2) \cdot 180° = 540°$ olduğundan

$130° + 110° + 140° + 100° + x = 540° \Rightarrow x = 540° - 480° = 60°$ bulunur.

Bilgi

Tüm kenar uzunlukları ve tüm iç açılarının ölçüleri eşit olan çokgene **düzgün çokgen** denir.

1) Düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü

$\dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ veya $180° - \dfrac{360°}{n}$ derecedir.

2) Düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü $\dfrac{360°}{n}$ derecedir.

ÖRNEK

Bir iç açısının ölçüsü 135° olan düzgün çokgenin kenar sayısını bulalım.

ÇÖZÜM

$180° - \dfrac{360°}{n} = 135° \Rightarrow \dfrac{360°}{n} = 180° - 135° = 45° \Rightarrow n = \dfrac{360°}{45°} = 8$ kenarlıdır.

ÖRNEK

Bir düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü 100° ile 120° arasında olduğuna göre bir iç açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Bir iç açısının ölçüsü 100° ile 120° arasında ise bir dış açısının ölçüsü 60° ile 80° arasındadır. Dış açının ölçüsü α ise

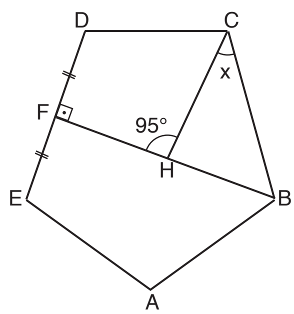
$$60^\circ < \alpha < 80^\circ \Rightarrow \frac{60^\circ}{360^\circ} < \frac{\alpha}{360^\circ} < \frac{80^\circ}{360^\circ} \Rightarrow \frac{360^\circ}{80^\circ} < \frac{360^\circ}{\alpha} < \frac{360^\circ}{60^\circ}$$

$4,5 < n < 6$ olur ve $n = 5$ bulunur.

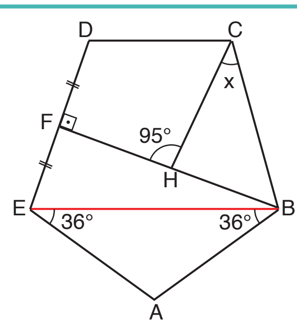
Bir dış açının ölçüsü $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ ve bir iç açının ölçüsü $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ olur.

ÖRNEK

ABCDE bir düzgün beşgen, $|EF| = |FD|$, $[BF] \perp [ED]$, $m(\widehat{FHC}) = 95^\circ$ ise $m(\widehat{HCB})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM



$[EB]$ çizilir.

Düzgün beşgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$ olup beşgenin bir iç açısının ölçüsü $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$ olur.

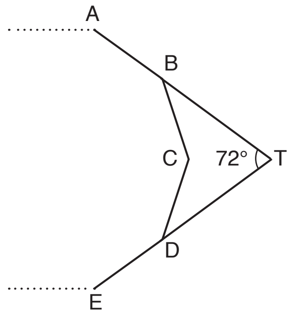
Yani $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{AEB}) = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ olur.

$[BF] \perp [ED]$ olduğundan,

$m(\widehat{DEB}) = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ ve $m(\widehat{BFE}) = 90^\circ$ olduğundan $m(\widehat{EBF}) = 18^\circ$ olur.

$m(\widehat{FBC}) = 108^\circ - (36^\circ + 18^\circ) = 108^\circ - 54^\circ = 54^\circ$ ve $m(\widehat{HCB}) = x = 95^\circ - 54^\circ = 41^\circ$ bulunur.

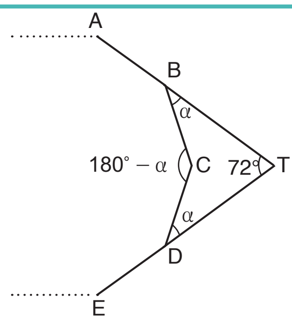
ÖRNEK



Şekilde verilen düzgün çokgen kesitinde,

$m(\widehat{BTD}) = 72^\circ$, A, B, T doğrusal ve E, D, T doğrusal ise bu düzgün çokgenin kenar sayısını bulalım.

ÇÖZÜM



Düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü α olursa tüm iç açılarının ölçüsü $(180^\circ - \alpha)$ olur. Buradan,

$72^\circ + 2\alpha = 180^\circ - \alpha \Rightarrow 3\alpha = 108^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$ bulunur.

Düzgün çokgenin kenar sayısı n ise $n = \dfrac{360^\circ}{\alpha}$ olduğundan $n = \dfrac{360^\circ}{36^\circ} = 10$ bulunur.

ÖRNEK

Bir düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü, bir dış açısının ölçüsünün 3 katıdır. Bu çokgenin kaç kenarlı olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

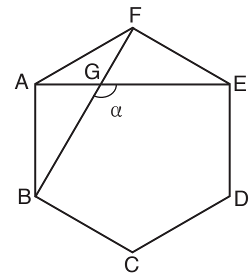
Bu düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü α ise dış açısının ölçüsü $180^\circ - \alpha$ olur.

$\alpha = 3(180^\circ - \alpha) \Rightarrow \alpha = 540^\circ - 3\alpha \Rightarrow 4\alpha = 540^\circ \Rightarrow \alpha = 135^\circ$ olur.

İç açısının ölçüsü 135° olan bir düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ olur.

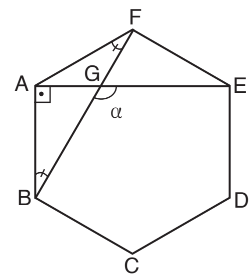
Dış açısının ölçüsü 45° olan çokgen $\dfrac{360^\circ}{45^\circ} = 8$ kenarlıdır.

ÖRNEK



ABCDEF düzgün altıgen ve $[AE] \cap [BF] = \{G\}$ olduğuna göre $m(\widehat{BGE})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

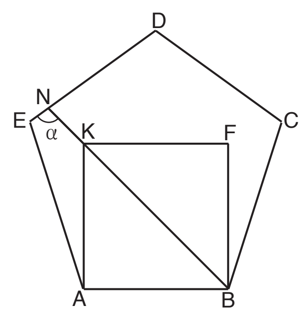


Düzgün altıgende bir iç açının ölçüsü $180° - \dfrac{360°}{6} = 120°$ olur.

$m(\widehat{ABF}) = m(\widehat{AFB}) = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$ olur.

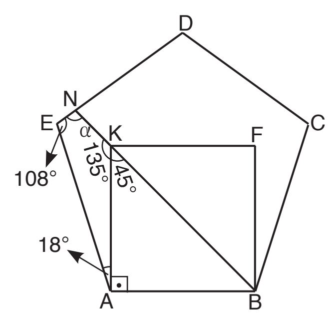
$m(\widehat{BAE}) = 90°$ olup $m(\widehat{BGE}) = \alpha = 90° + 30° = 120°$ bulunur.

ÖRNEK



ABCDE düzgün beşgen, ABFK kare, $N \in [ED]$ ve $K \in [BN]$ olduğuna göre $m(\widehat{ENB})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



ABCDE düzgün beşgeninin bir iç açısının ölçüsü $180° - \dfrac{360°}{5} = 108°$ olur.

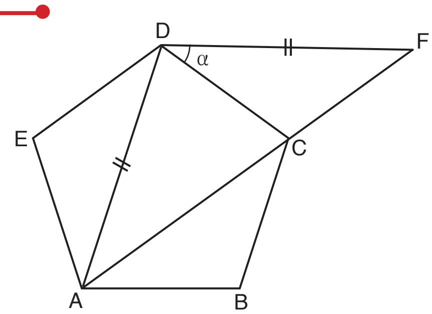
$m(\widehat{AED}) = m(\widehat{EAB}) = 108°$ olur.

ABFK kare, $[BK]$ köşegen olup $m(\widehat{AKB}) = 45°$ ve $m(\widehat{AKN}) = 135°$ bulunur.

$m(\widehat{EAK}) = 108° - 90° = 18°$ olup

$m(\widehat{ENB}) = \alpha = 360° - (108° + 135° + 18°) = 99°$ bulunur.

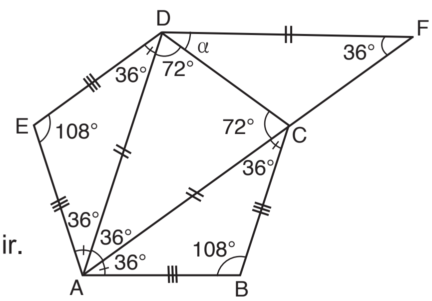
ÖRNEK



ABCDE düzgün beşgen,

$|DA| = |DF|$ ise $m(\widehat{CDF})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



ABCDE düzgün beşgeninde bir iç açının ölçüsü

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ \text{ olur.}$$

$\widehat{AED}$ ve $\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgen olduğundan

$$m(\widehat{EAD}) = m(\widehat{EDA}) = m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACB}) = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ \text{ dir.}$$

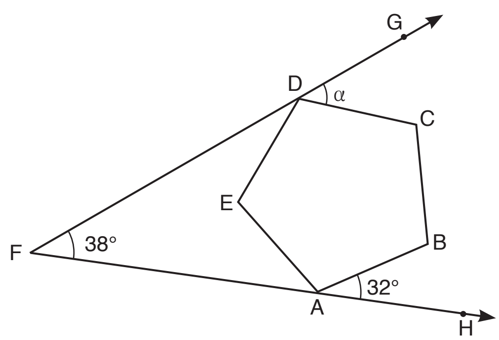
$[AD]$ ve $[AC]$ köşegen olup $\widehat{ADC}$ ikizkenar üçgendir.

$m(\widehat{EAB}) = 108^\circ$ olduğundan $m(\widehat{CAD}) = 108^\circ - (36^\circ + 36^\circ) = 36^\circ$ olur.

ADC ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ACD}) = \dfrac{108^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$ olur.

$m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{DFA}) = 36^\circ \Rightarrow m(\widehat{CDF}) = \alpha = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$ olur.

Etkinlik



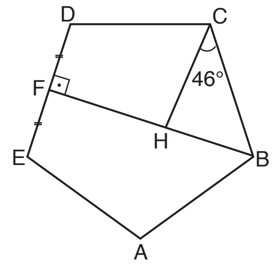
Şekildeki ABCDE düzgün beşgeninde

$m(\widehat{DFA}) = 38^\circ, m(\widehat{BAH}) = 32^\circ$ veriliyor.

◈ α açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

✷ α açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu nasıl hesapladınız? Açıklayınız.

Alıştırmalar 5-1



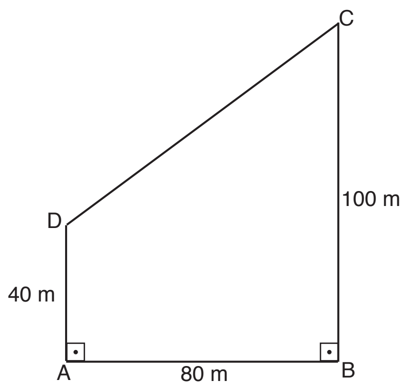
1) ABCDE düzgün beşgen, $|EF| = |FD|$, $[BF] \perp [ED]$

$m(\widehat{BCH}) = 46°$, $F \in [ED]$ ve $H \in [BF]$ ise $m(\widehat{FHC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

2) Bir iç açısının ölçüsü 144° olan düzgün çokgenin kenar sayısını bulunuz.

3) Bir dış açısının ölçüsü α olan düzgün çokgende $62° < \alpha < 87°$ ise bu çokgenin kenar sayısını bulunuz.

5.2. Dörtgenler ve Özellikleri



Şekilde görülen tarlanın etrafı tel ile çevrilmek istenmektedir.

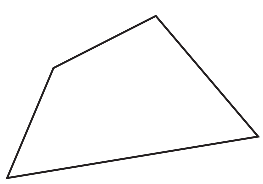
Kaç metre tele ihtiyaç olduğunu bulmak için tarlanın çevre uzunluğu hesaplanabilir mi?

Bilgi

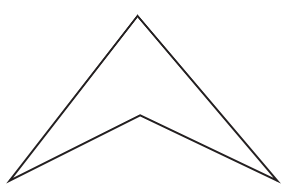
- Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan dört noktayı ikişer ikişer birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu kapalı şekle **dörtgen** denir.

Bu dört noktaya dörtgenin **köşeleri**, dörtgeni oluşturan doğru parçalarına da dörtgenin **kenarları** denir.

Dörtgenin hiçbir kenarının uzantısı diğer kenarı kesmiyorsa bu dörtgene **dışbükey (konveks)** dörtgen, kesiyorsa bu dörtgene **içbükey (konkav)** dörtgen denir.



Dışbükey (konveks)



İçbükey (konkav)

Bilgi

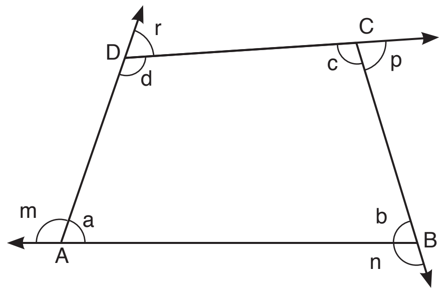
Konveks (dışbükey) dörtgenlerde özellikler

Dörtgenin iç açı ölçüleri toplamı

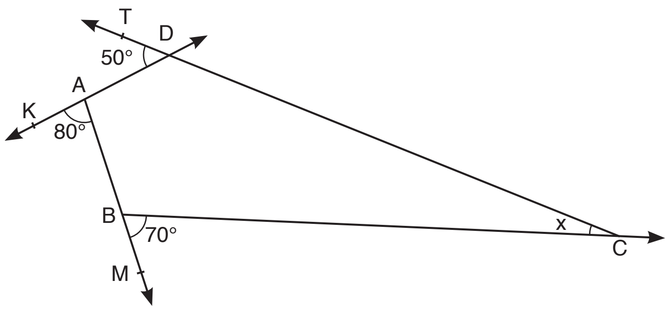
$a + b + c + d = 360^\circ$ dir.

Dörtgenin dış açı ölçüleri toplamı

$m + n + p + r = 360^\circ$ dir.



ÖRNEK



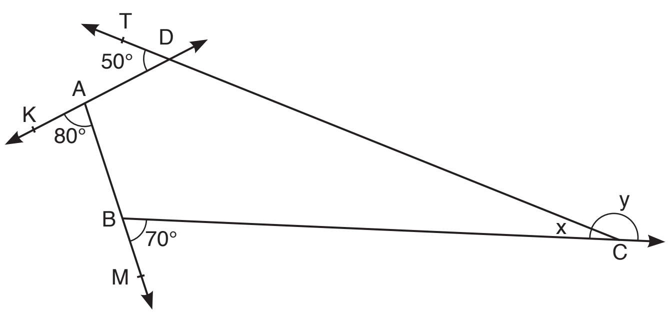
Şekildeki verilere göre,

$m(\widehat{KAB}) = 80^\circ$,

$m(\widehat{ADT}) = 50^\circ$, $m(\widehat{MBC}) = 70^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{DCB})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

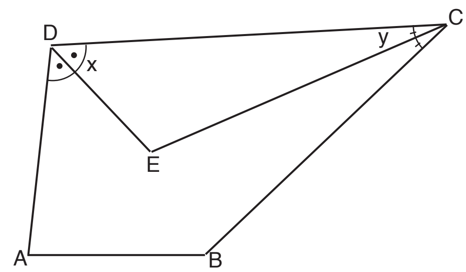


$50^\circ + 80^\circ + 70^\circ + y = 360^\circ$

$y = 360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$

$x = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$ olur.

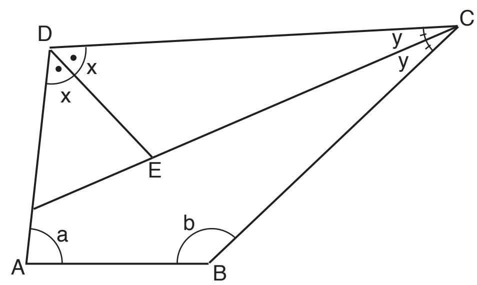
ÖRNEK



Şekilde $[DE]$ ADC açısının ve $[CE]$ ise DCB açısının açıortayıdır.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 220^\circ$ olduğuna göre $x + y$ nın kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



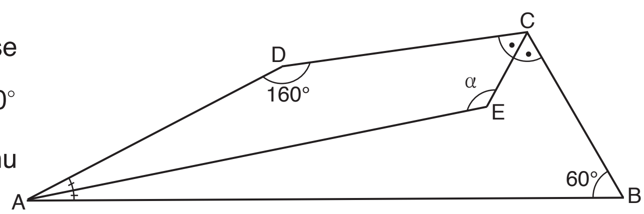
$a + b + 2x + 2y = 360^\circ$

$2x + 2y + 220^\circ = 360^\circ$

$2x + 2y = 140^\circ$

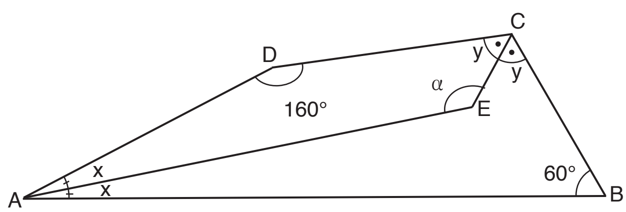
$x + y = 70^\circ$ bulunur.

ÖRNEK



ABCD bir dörtgen, $[AE]$ DAB açısının $[CE]$ ise DCB açısının açıortayı $m(\widehat{B}) = 60^\circ$, $m(\widehat{D}) = 160^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{AEC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$2x + 2y + m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$

$2x + 2y + 60^\circ + 160^\circ = 360^\circ$

$2x + 2y = 360^\circ - 220^\circ$

$2x + 2y = 140^\circ$

$x + y = 70^\circ$

$x + y + m(\widehat{D}) + \alpha = 360^\circ$

$70^\circ + 160^\circ + \alpha = 360^\circ$

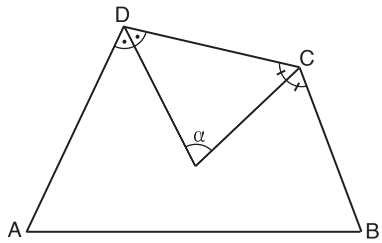
$\alpha = 360^\circ - 230^\circ$

$\alpha = 130^\circ$ bulunur.

Etkinlik

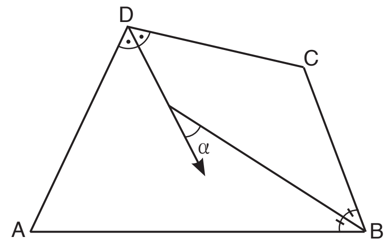
Örneklerden yola çıkarak aşağıda verilen iki formülün nasıl oluşturulduğunu bulabilir misiniz?

I)



$$\alpha = \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})}{2}$$

II)

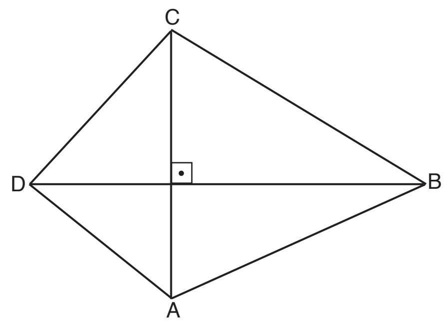


$$\alpha = \frac{\left|m(\widehat{A}) - m(\widehat{C})\right|}{2}$$

Bilgi

Köşegenleri dik kesişen bir dörtgende, karşılıklı kenarların uzunluklarının kareleri toplamı birbirine eşittir.

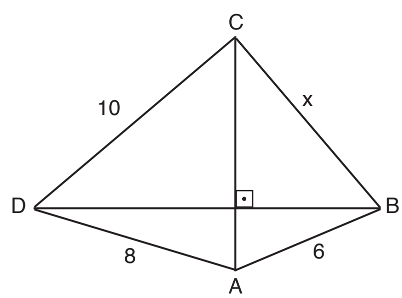
$[AC] \perp [BD]$ ise $|AD|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 + |DC|^2$ olur.



ÖRNEK

Şekilde $[BD] \perp [AC]$,

$|AD| = 8$ br, $|AB| = 6$ br, $|DC| = 10$ br ise $|BC|$ nun kaç birim olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

$|AD|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 + |DC|^2$

$8^2 + x^2 = 6^2 + 10^2$

$x^2 = 36 + 100 - 64$

$x^2 = 72$

$x = 6\sqrt{2}$ br bulunur.

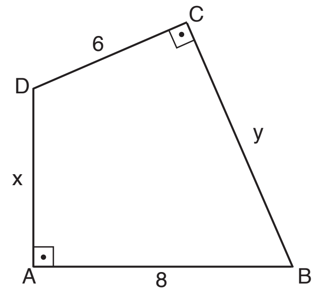
ÖRNEK

Şekildeki ABCD dörtgeninde, $|AD| = x$ ve $|BC| = y$,

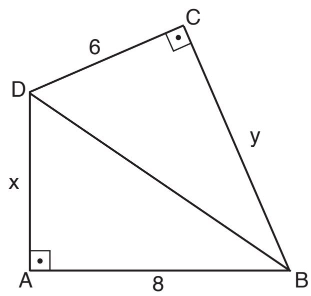
$m(\widehat{C}) = 90°, m(\widehat{A}) = 90°$, $|AB| = 8$ br, $|DC| = 6$ br ve

$y - x = 4$ br olduğuna göre Ç(ABCD) nin,

x ve y uzunluklarının kaç birim olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM



[DB] her iki dik üçgenin hipotenüsüdür.

$|DB|^2 = 6^2 + y^2$

$|DB|^2 = x^2 + 8^2$ olduğundan

$6^2 + y^2 = x^2 + 8^2$

$y^2 - x^2 = 28$

$(y - x)(y + x) = 28$

$4 \cdot (y + x) = 28$ ve $y + x = 7$ dir.

$$\begin{aligned} Ç(ABCD) &= x + y + 6 + 8 \\ &= 7 + 14 \\ &= 21 \text{ br bulunur.} \end{aligned}$$

Eğer x ve y yi bulmak istersek

$$\begin{array}{r l} & y - \cancel{x} = 4 \\ + & y + \cancel{x} = 7 \\ \hline & 2y = 11 \end{array}$$

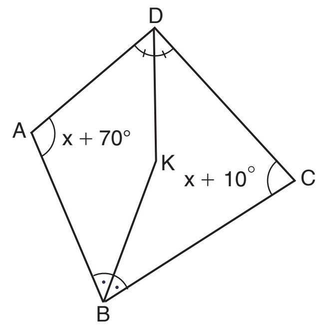
$y = \dfrac{11}{2}$ br

$y + x = 7$

$\dfrac{11}{2} + x = 7 \Rightarrow x = 7 - \dfrac{11}{2} = \dfrac{3}{2}$ br bulunur.

Alıştırmalar 5-2

1)



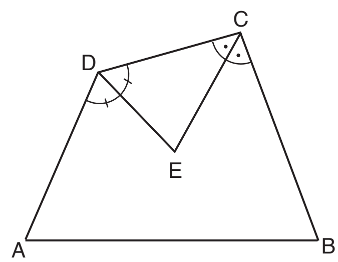
ABCD dörtgen, [DK] ADC açısının ve [BK] ise ABC açısının açıortaylarıdır.

$m(\widehat{DAB}) = x + 70°$,

$m(\widehat{BCD}) = x + 10°$ olduğuna göre

$m(\widehat{BKD})$ kaç derecedir?

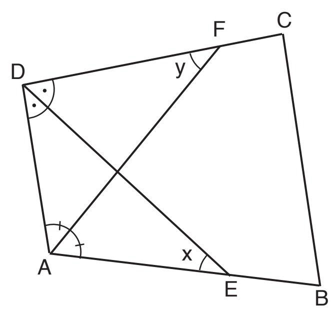
2)



ABCD dörtgeninde, [DE] ADC açısının ve [CE] ise DCB açısının açıortaylarıdır.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 152°$ ise $m(\widehat{DEC})$ kaç derecedir?

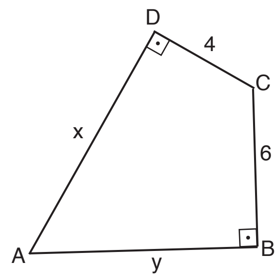
3)



ABCD dörtgeninde, [AF] DAE açısının ve [DE] ise ADC açısının açıortaylarıdır.

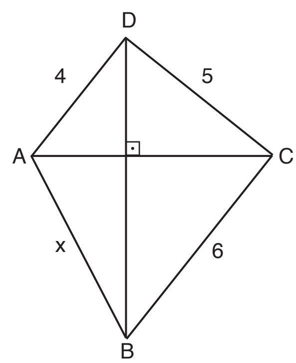
$m(\widehat{DEA}) = x°$ ve $m(\widehat{DFA}) = y°$ olmak üzere $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 170°$ ise $x + y$ işleminin sonucunu bulunuz.

4)



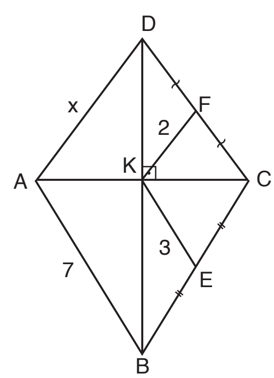
ABCD dörtgen, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CDA}) = 90°$, $|BC| = 6$ br, $|CD| = 4$ br, $|DA| = x$ br, $|AB| = y$ br ve $x - y = 4$ olduğuna göre $Ç(ABCD)$ kaç birimdir?

5)



ABCD dörtgen, $[AC] \perp [DB]$, $|BC| = 6$ br, $|CD| = 5$ br, $|DA| = 4$ br olduğuna göre $|AB|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.

6)



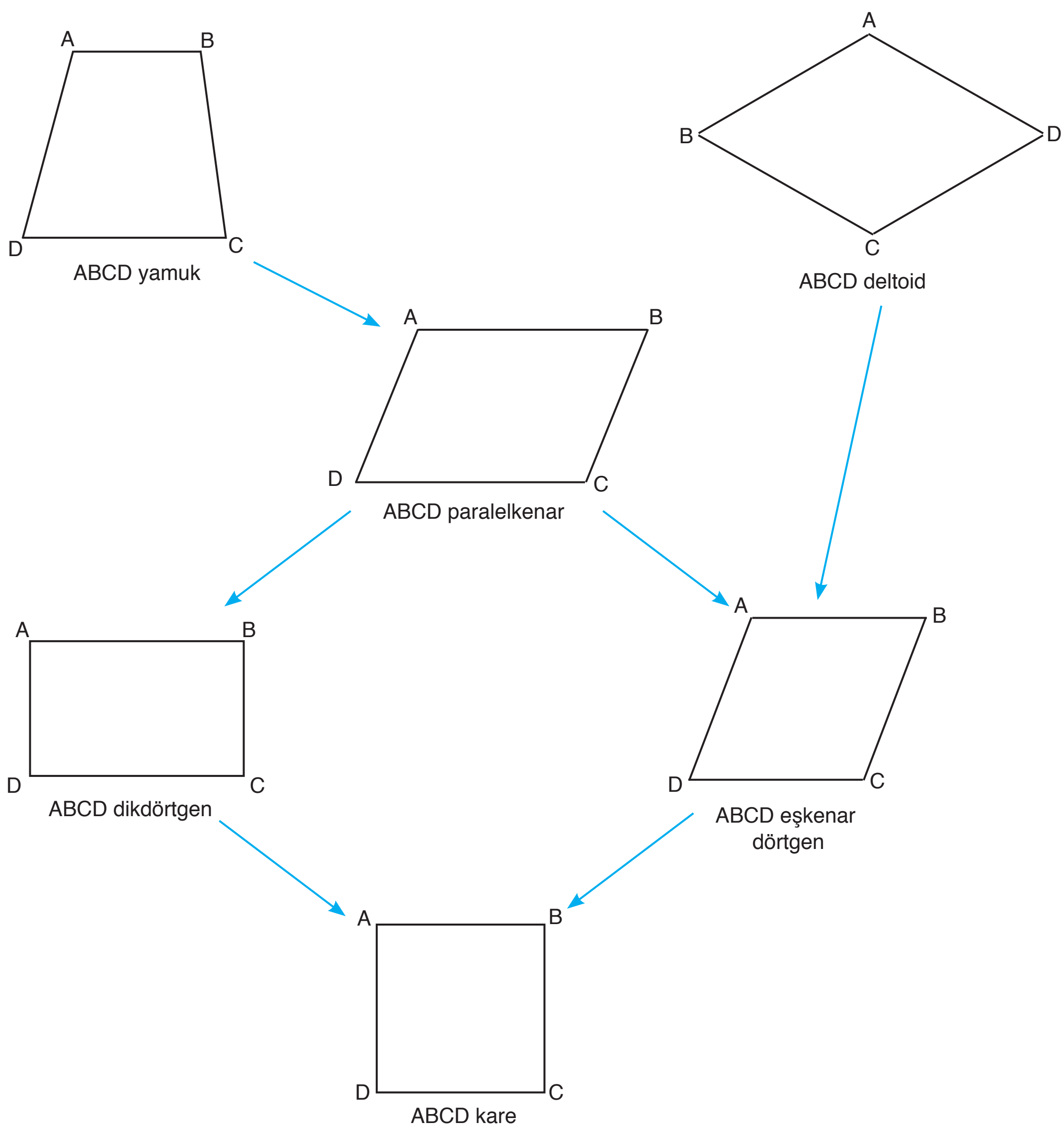
ABCD dörtgen, $[AC] \cap [DB] = \{K\}$, $F \in [CD]$, $E \in [BC]$, $[AC] \perp [DB]$, $|BE| = |EC|$, $|CF| = |FD|$, $|KE| = 3$ br, $|KF| = 2$ br, $|AB| = 7$ br ise $|DA|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.

5.3. Özel Dörtgenler

Bilgi

Yamuk, paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen, kare ve deltoid gibi özel dörtgenlerin birbirine benzer özellikleri vardır. Bu dörtgenler arasında hiyerarşik bir ilişki vardır.

Aşağıdaki şemada özel dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişki verilmiştir.



Paralelkenar, yamuğun tüm özelliklerini sağladığından özel bir yamuktur.

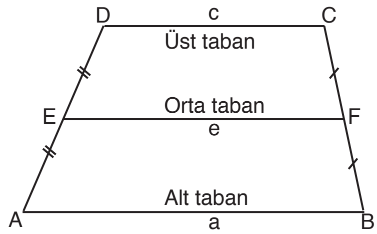
Dikdörtgen, paralelkenarın tüm özelliklerini sağladığından özel bir paralelkenardır.

Eşkenar dörtgen, paralelkenarın tüm özelliklerini sağladığından özel bir paralelkenardır. Aynı zamanda deltoittir.

Kare, dikdörtgenin tüm özelliklerini sağladığından özel bir dikdörtgendir. Aynı zamanda eşkenar dörtgen ve deltoittir.

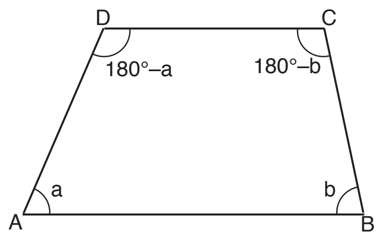
Yamuk

Bilgi



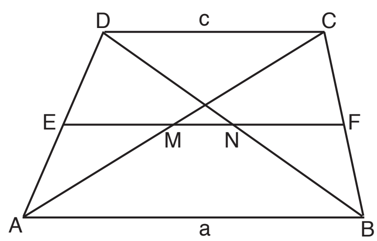
En az iki kenarı paralel olan dörtgene **yamuk** denir. [AB] na alt taban [DC] na üst taban, yan kenarların orta noktalarından geçen doğru parçasına yani [EF] na **orta taban** denir.

Orta taban üst ve alt tabana paraleldir.



1) Yamukta alt ve üst tabanlar birbirine paralel olduğundan

$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{A})+m(\widehat{D})=180^\circ \\ m(\widehat{B})+m(\widehat{C})=180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow m(\widehat{A})+m(\widehat{D})=m(\widehat{B})+m(\widehat{C}) \text{ olur.}$$



2) ABCD yamuğunda $[EF]$ orta taban, $[AC]\cap[EF]=\{M\}$ ve $[DB]\cap[EF]=\{N\}$,

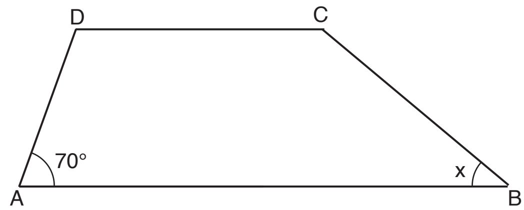
$[AC]$ ve $[BD]$ köşegenler,

$|AB|=a$ ve $|DC|=c$ olmak üzere;

$|EM|=|NF|=\dfrac{c}{2}$, $|EN|=|MF|=\dfrac{a}{2}$,

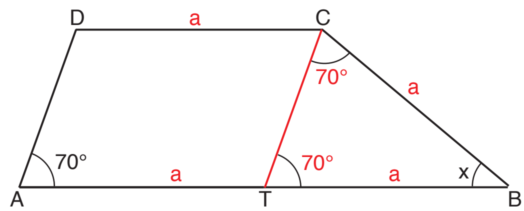
$|EF|=\dfrac{a+c}{2}$, $|MN|=\dfrac{|a-c|}{2}$ olur.

ÖRNEK



ABCD yamuk, $|AB| = 2|DC| = 2|BC|$, $[DC] \mathbin{/\!/} [AB]$, $m(\widehat{DAB}) = 70^\circ$ ise $m(\widehat{ABC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$|AB| = 2|DC| = 2|BC|$ olduğuna göre,

$|DC| = |BC| = a$ dan $|AB| = 2a$ olur.

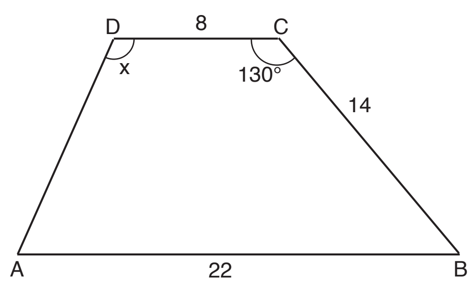
C noktasından $[AD]$ na paralel çizersek $\widehat{DAB}$ ile $\widehat{CTB}$ yöndeş açı olacağından $m(\widehat{CTB}) = 70^\circ$,

$|AT| = |TB| = a$ olur.

Bu durumda $\widehat{BTC}$ ikizkenar üçgen olur.

$m(\widehat{CTB}) = m(\widehat{TCB}) = 70^\circ$ ve $m(\widehat{ABC}) = x = 40^\circ$ bulunur.

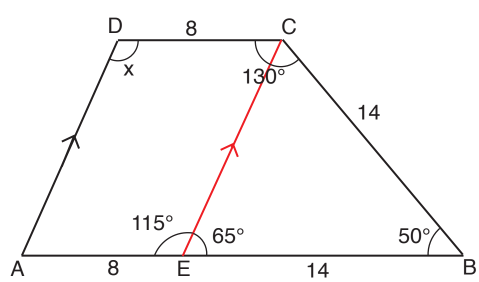
ÖRNEK



ABCD yamuk, $m(\widehat{DCB}) = 130^\circ$, $[DC] \mathbin{/\!/} [AB]$

$|DC| = 8$ br, $|BC| = 14$ br, $|AB| = 22$ br olduğuna göre $m(\widehat{ADC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{DCB}) = 130^\circ$ ise $m(\widehat{ABC}) = 50^\circ$ dir.

C noktasından $[AD]$ na çizilen paralel doğru, $[AB]$ nı E noktasında keser.

Bu durumda $|DC| = |AE| = 8$ br, $|EB| = 14$ br olur ve

$m(\widehat{CEB}) = m(\widehat{ECB}) = \dfrac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$,

$m(\widehat{AEC}) = 180^\circ - m(\widehat{CEB}) = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ olur.

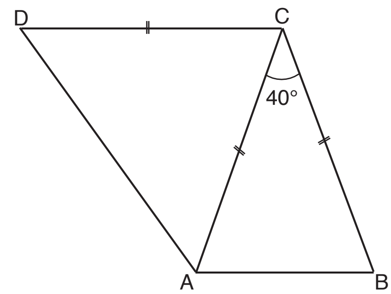
Buradan $m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{ADC}) = x = 115^\circ$ bulunur.

ÖRNEK

ABCD yamuk,

$|AC| = |BC| = |DC|$, $[DC] \parallel [AB]$ $m(\widehat{ACB}) = 40^\circ$ ise

$m(\widehat{CAD})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.



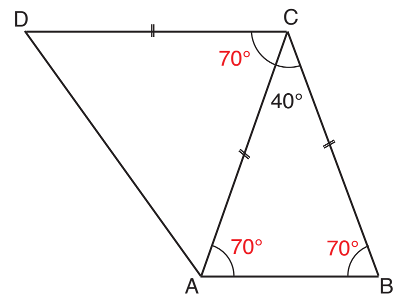
ÇÖZÜM

CAB ikizkenar üçgeninde $m(\widehat{CAB}) = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$,

$[DC] \parallel [AB]$ olduğundan

$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{DCA}) = 70^\circ$ olur.

$m(\widehat{CAD}) = \dfrac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$ bulunur.



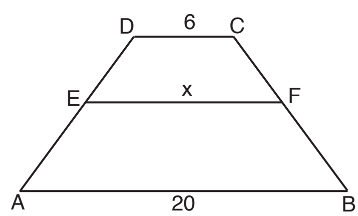
ÖRNEK

ABCD yamuk, $[AB] \parallel [CD] \parallel [EF]$,

$|AB| = 20$ br, $|CD| = 6$ br ve

$3|AE| = 4|ED|$ ise $|EF|$ nun

kaç birim olduğunu bulalım.



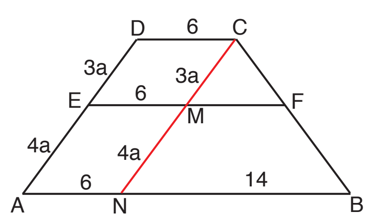
ÇÖZÜM

$[DA]$ na paralel olarak $[CN]$ nı çizelim.

$|DC| = |EM| = |AN| = 6$ br ve $|NB| = 14$ br olur.

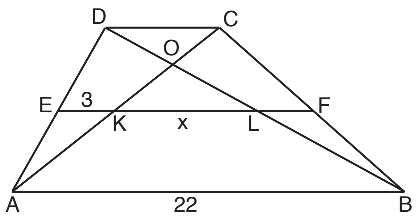
$3|AE| = 4|ED|$ eşitliğinde $|AE| = 4a$, $|ED| = 3a$ dır.

$\overset{\frown}{CNB} \sim \overset{\frown}{CMF}$ olduğundan



$\dfrac{3a}{7a} = \dfrac{|MF|}{|NB|} \Rightarrow \dfrac{3}{{}^{1}\cancel{7}} = \dfrac{|MF|}{{}^{2}\cancel{14}} \Rightarrow |MF| = 6$ br olur ve $|EF| = 6 + 6 = 12$ br bulunur.

ÖRNEK



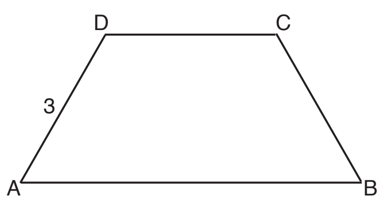
Şekilde ABCD yamuk, $[AC] \cap [EF] = \{K\}$, $[DB] \cap [EF] = \{L\}$, $[EF]$ orta taban, $[DC] \parallel [AB]$, $|EK| = 3$ br, $|AB| = 22$ br ise $|KL|$ nun kaç birim olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$[EF]$ orta taban olduğundan $\widehat{ADC}$ nde $|DC|$, $|EK|$ nun 2 katıdır. Yani $|DC| = 6$ br dir.

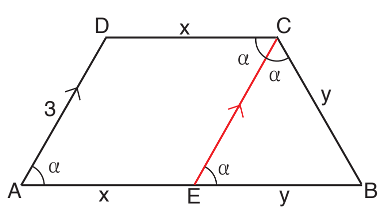
$|KL| = x = \dfrac{22-6}{2} = 8$ br bulunur.

ÖRNEK



ABCD yamuk, $m(\widehat{BCD}) = 2m(\widehat{BAD})$, $|AD| = 3$ br, ABCD yamuğunun çevresi 21 br ise $|AB|$ nun kaç birim olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$[DA]$ na paralel olarak $[CE]$ nı çizelim.

$m(\widehat{DAE}) = \alpha$ olsun.

$m(\widehat{CEB}) = m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{ECD}) = \alpha$ olur.

$|CE| = |AD| = 3$ br dir.

$|DC| = |AE| = x$ ve $|BC| = |BE| = y$ dersek $21 = 2x + 2y + 3 \Rightarrow |AB| = x + y = 9$ br bulunur.

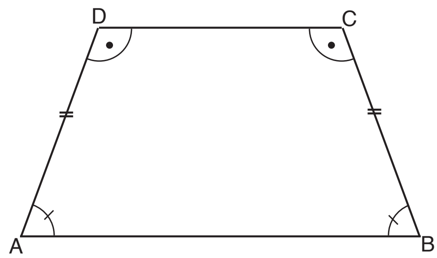
İkizkenar Yamuk

Bilgi

$|AD| = |BC|$, $[DC] \parallel [AB]$ ise ABCD yamuğuna **ikizkenar yamuk** denir.

İkizkenar yamukta,

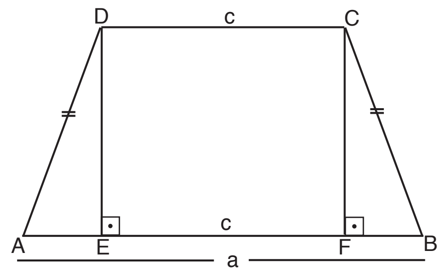
$|AD| = |BC|$, $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$ ve $m(\widehat{C}) = m(\widehat{D})$ olur.



1) $|AB| = a, |DC| = c,$

$[DE] \perp [AB]$ ve $[CF] \perp [AB]$,

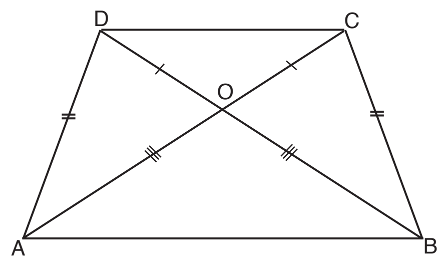
$|AE| = |FB| = \dfrac{|a-c|}{2}$ dir.



2) İkizkenar yamukta köşegen uzunlukları eşittir.

$[DB] \cap [AC] = \{O\}$,

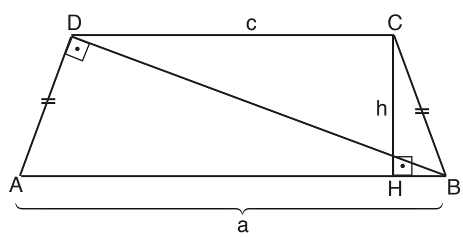
$|AO| = |OB|$, $|DO| = |CO|$, $|AC| = |BD|$ dir.



3) $[CH] \perp [AB], |AB| = a, |DC| = c, |CH| = h$

İkizkenar yamukta köşegen yan kenara dik ise

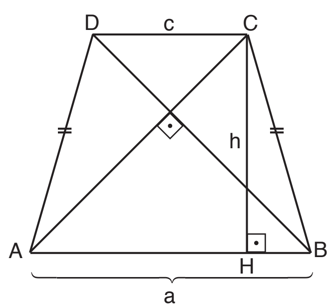
yamuğun yüksekliği, $h = \dfrac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}$ olur.



4) $[CH] \perp [AB], |AB| = a, |DC| = c, |CH| = h$

İkizkenar yamukta köşegenler birbirine dik ise

yamuğun yüksekliği, $h = \dfrac{a + c}{2}$ olur.



ÖRNEK

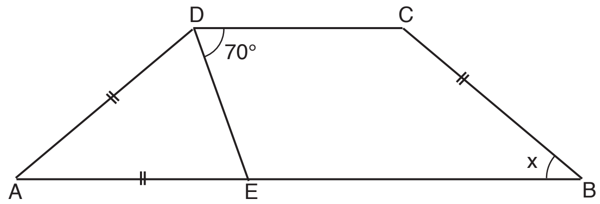
ABCD ikizkenar yamuk,

$[DC] \parallel [AB]$, $E \in [AB]$,

$|AD| = |AE| = |BC|$,

$m(\widehat{EDC}) = 70°$ olduğuna göre

$m(\widehat{ABC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

$[DC] \parallel [AB]$ olduğudan $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{DEA}) = 70°$ ve $\widehat{AED}$ ikizkenar üçgen olduğundan

$m(\widehat{DEA}) = m(\widehat{ADE}) = 70°$ dir.

Bu durumda $m(\widehat{DAE}) = 180° - (70° + 70°) = 40°$ olur.

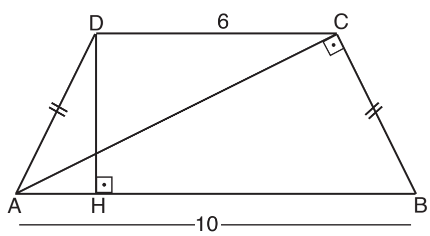
İkizkenar yamukta taban açıları eş olduğundan $x = m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{ABC}) = 40°$ bulunur.

ÖRNEK

ABCD ikizkenar yamuğunda, $[DC] \parallel [AB]$,

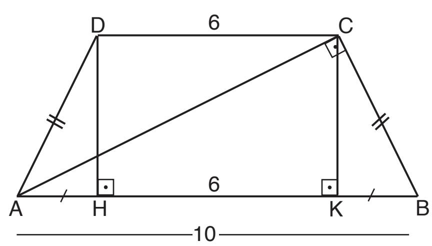
$|AD| = |BC|$, $[AC] \perp [BC]$, $[DH] \perp [AB]$ dır.

$|AB| = 10$ br, $|DC| = 6$ br ise $|AH|$ nun kaç birim olduğunu bulalım.

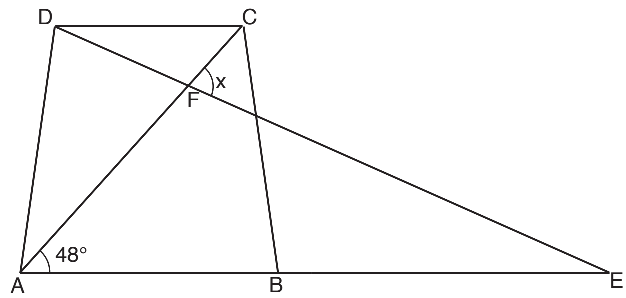


ÇÖZÜM

$|AH| = \dfrac{10 - 6}{2} = 2$ br olur.

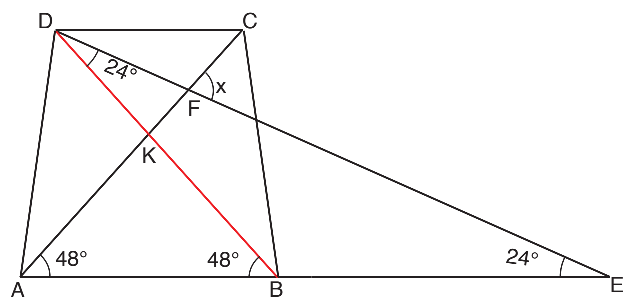


ÖRNEK



$[DC] \parallel [AB]$, $[AC] \cap [DE] = \{F\}$, ABCD ikizkenar yamuk, $|AC| = |BE|$, $m(\widehat{EAC}) = 48^\circ$ ise $m(\widehat{CFE})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$[DB]$ köşegeni çizilir. İkizkenar yamukta köşegen uzunlukları eşit olduğundan

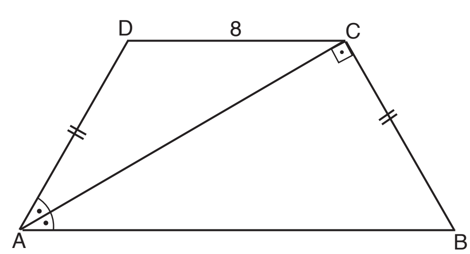
$|AC| = |BD| = |BE|$ den $\widehat{BDE}$ ikizkenar üçgen olur. $|AK| = |KB|$ ve $\widehat{ABK}$ ikizkenar üçgen olup

$m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{DBA}) = 48^\circ$ olduğundan $m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{DEB}) = 24^\circ$ olur.

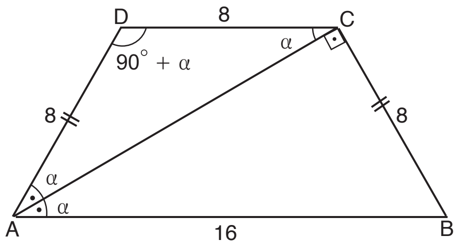
FAE üçgeninde $m(\widehat{EFC}) = x = 24^\circ + 48^\circ = 72^\circ$ olur.

ÖRNEK

ABCD ikizkenar yamuk, $|DC| = 8$ br, $[DC] \parallel [AB]$, $[AC]$ $\widehat{DAB}$ nın açıortayı, $[AC] \perp [CB]$ ise Ç$(ABCD)$ nin kaç birim olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM



$[DC] \parallel [AB]$ olduğundan

$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACD}) = \alpha$ olup

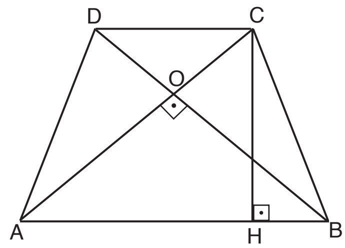
$|AD| = |DC| = 8$ br bulunur.

İkizkenar yamukta karşı durumlu açıların ölçüleri toplamı 180° olduğundan

$2\alpha + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ olur.

$\widehat{CAB}$ 30°- 60°- 90° üçgeni olup $|AB| = 16$ br, $Ç(ABCD) = 16 + 8 + 8 + 8 = 40$ br olur.

ÖRNEK



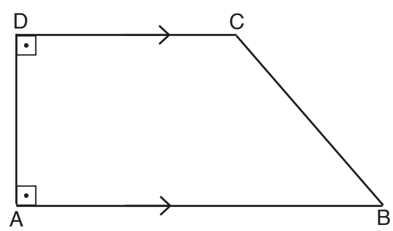
ABCD ikizkenar yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$, $[CH] \perp [AB]$, $[AC] \perp [BD]$, $|AB| = 6$ br, $|DC| = 4$ br ise $|CH|$ nun kaç birim olduğunu bulalım bulalım.

ÇÖZÜM

$|CH| = \dfrac{6+4}{2} = 5$ br bulunur.

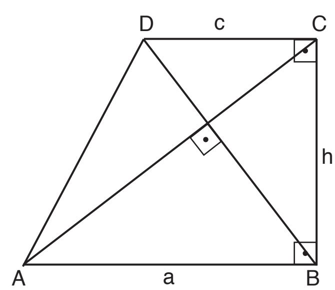
Dik Yamuk

Bilgi



Alt ve üst tabanları yan kenarlarından birine dik olan yamuğa **dik yamuk** denir.

$[AB] \parallel [DC]$



$|DC| = c, |AB| = a, |CB| = h$

Dik yamukta köşegenler birbirine dik ise yükseklik, alt ve üst tabanın uzunluklarının geometrik ortalamasıdır.

$h = \sqrt{a \cdot c}$

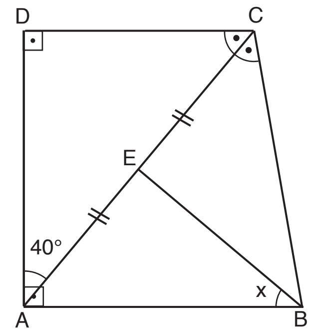
ÖRNEK

ABCD dik yamuk, $E \in [AC]$,

$[DA] \perp [AB]$, $[AB] \parallel [DC]$,

$m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{ACB})$, $m(\widehat{CAD}) = 40^\circ$,

$|AB| = |BC|$, $|AE| = |EC|$ ise $m(\widehat{EBA})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

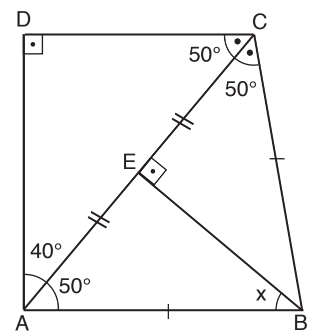


ÇÖZÜM

$m(\widehat{CAD}) = 40^\circ$ ise $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ACB}) = 50^\circ$ olur.

$\widehat{BAC}$ ikizkenar üçgen olduğundan $[BE] \perp [AC]$ olur.

$m(\widehat{EBA}) = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ bulunur.

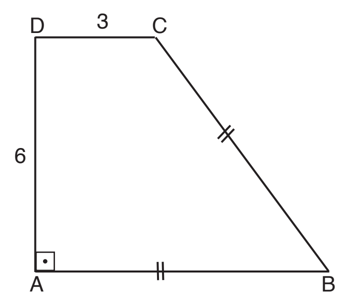


ÖRNEK

ABCD dik yamuk, $[DA] \perp [AB]$,

$[DC] \parallel [AB]$, $|DC| = 3$ br, $|AD| = 6$ br,

$|BC| = |AB|$ ise Ç(ABCD) nin kaç birim olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

C noktasından [AB] na dik çizelim.

$[CE] \perp [AB]$ ve $|CE| = 6$ br, $|AE| = 3$ br,

$|AB| = |BC| = x$ ise $|EB| = (x - 3)$ br olur.

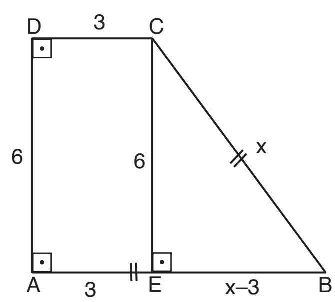
$\widehat{CEB}$ nde Pisagor teoremi uygulanırsa

$x^2 = (x - 3)^2 + 6^2$

$\cancel{x^2} = \cancel{x^2} - 6x + 9 + 36$

${}^{2}\cancel{6}x = \cancel{45}^{15}$

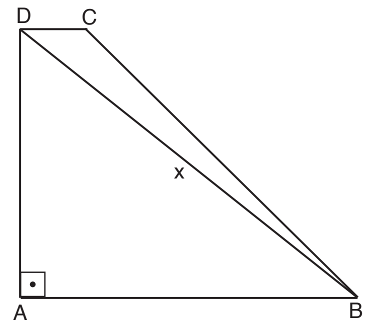
$x = \dfrac{15}{2}$ olur. Buradan $Ç(ABCD) = 2x + 3 + 6 = 2 \cdot \dfrac{15}{2} + 9 = 24$ br bulunur.



Etkinlik

◈ ABCD dik yamuk, $[DC] \parallel [AB]$, $|DC| = 2$ br, $|DA| = 8$ br, $|CB| = 10$ br ise $|BD|$ nu bulunuz.

✷ x uzunluğunun kaç birim olduğunu bulurken hangi kuraldan faydalandınız? Açıklayınız.



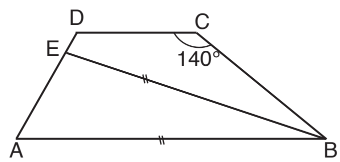
Alıştırmalar 5-3

1) ABCD yamuğunda;

$[BE]$ ABC açısının açıortayı, $[AB]//[CD]$,

$m(\widehat{BCD}) = 140°$, $|AB| = |BE|$ olduğuna göre

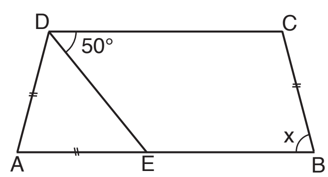
$m(\widehat{ADC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



2) ABCD ikizkenar yamuk, $E \in [AB]$,

$[DC]//[AB]$, $|AD| = |AE| = |BC|$, $m(\widehat{EDC}) = 50°$ ise

$m(\widehat{ABC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

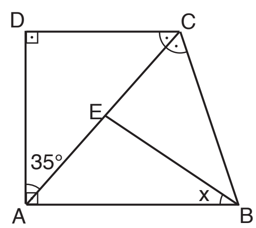


3) ABCD dik yamuk, $E \in [AC]$,

$[DA] \perp [AB]$, $[AB]//[DC]$, $m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{ACB})$,

$m(\widehat{CAD}) = 35°$, $|EB| = |EC|$ olduğuna göre

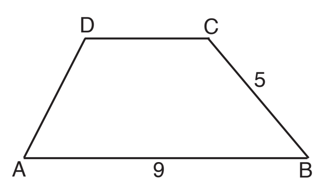
$m(\widehat{EBA})$ nün kaç derece olduğunu buluruz.



4) ABCD yamuk, $[DC] \parallel [AB]$,

$m(\widehat{ADC}) = 2m(\widehat{CBA})$,

$|CB| = 5$ br, $|AB| = 9$ br ise $Ç(ABCD)$ nin kaç birim olduğunu bulunuz.

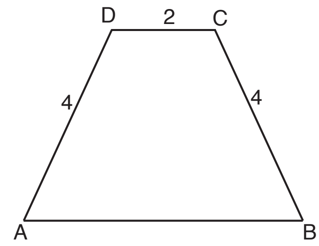


5) ABCD ikizkenar yamuk, $[DC] \parallel [AB]$,

$|AD| = |CB| = 4$ br, $|DC| = 2$ br,

C açısının ölçüsü B açısının ölçüsünün yarısından 90° fazladır.

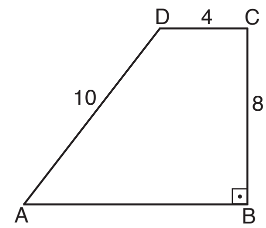
Ç(ABCD) nin kaç birim olduğunu bulunuz.



6) ABCD dik yamuk, $[DC] \parallel [AB]$, $[CB] \perp [AB]$,

$|DC| = 4$ br, $|BC| = 8$ br,

$|AD| = 10$ br ise Ç(ABCD) nin kaç birim olduğunu bulunuz.



Paralelkenar

Bilgi

Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgene **paralelkenar** denir.

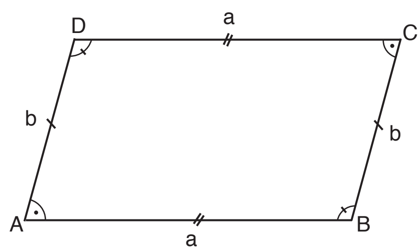
$[AB] \parallel [DC], [AD] \parallel [BC]$

a) Paralelkenarda karşılıklı kenarların uzunlukları birbirine eşittir. $|AB| = |CD|$, $|AD| = |BC|$

b) Paralelkenarda karşılıklı açılar eş, ardışık açılar bütünlerdir.

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180°$, $m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 180°$ dir.

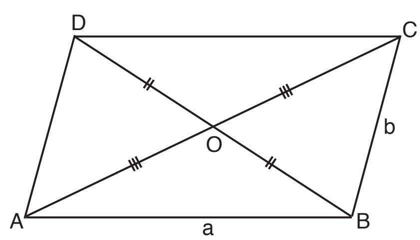


1) Paralelkenarda köşegenler birbirini ortalar.

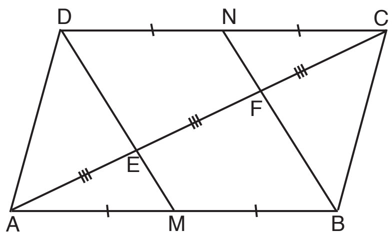
$|AO| = |OC|$ ve $|DO| = |BO|$, $|AB| = a$ ve $|BC| = b$,

$|AC| = e$, $|BD| = f$ olmak üzere,

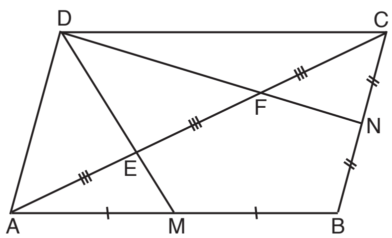
$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ dir.



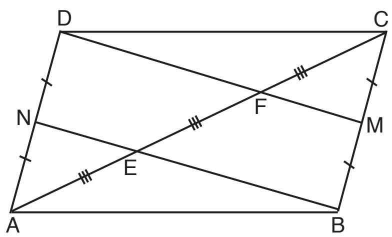
2) Bir paralelkenarda M ve N bulundukları kenarların orta noktaları ise



$[AC] \cap [DM] = \{E\}$ ve $[AC] \cap [NB] = \{F\}$ olmak üzere $|AE| = |EF| = |FC|$ olur.



$[AC] \cap [DM] = \{E\}$ ve $[AC] \cap [DN] = \{F\}$ olmak üzere $|AE| = |EF| = |FC|$ olur.



$[AC] \cap [NB] = \{E\}$ ve $[AC] \cap [DM] = \{F\}$ olmak üzere $|AE| = |EF| = |FC|$, $|NE| = |FM|$, $|EB| = |DF|$ olur.

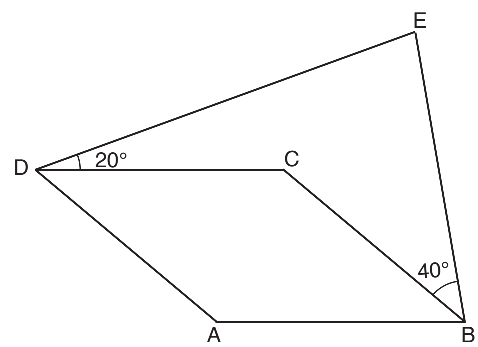
ÖRNEK

ABCD bir paralelkenar,

$m(\widehat{EDC}) = 20^\circ$, $m(\widehat{EBC}) = 40^\circ$,

$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{DEB})$ dir.

Yandaki şekle göre $m(\widehat{DEB})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

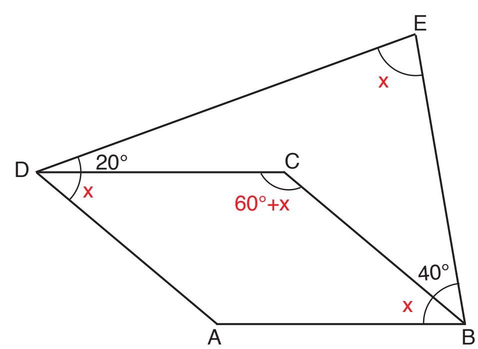


ÇÖZÜM

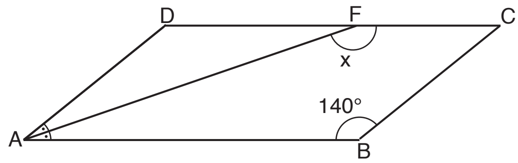
$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{DEB}) = x$ olsun. Bu durumda

$m(\widehat{ABC}) = x$ olur. $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DCB}) = 60^\circ + x$ olup

$2 \cdot (60^\circ + x) + 2x = 360^\circ \Rightarrow 4x = 240^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$ bulunur.



Etkinlik



ABCD paralelkenar, $F \in [DC]$,

$m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{FAB})$, $m(\widehat{ABC}) = 140^\circ$ dir.

◈ Yukarıdaki şekle göre $m(\widehat{AFC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

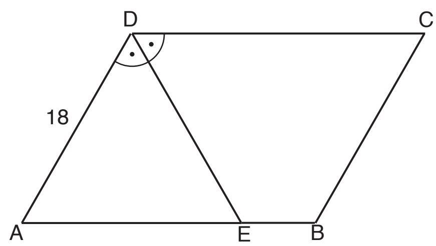
✷ Çözüme ulaşırken hangi kurallardan faydalandınız? Açıklayınız.

ÖRNEK

ABCD paralelkenar, $[DE]$ ADC açısının açıortayı,

$|AE| = 3 \cdot |EB|$, $|AD| = 18$ br olduğuna göre

$Ç(ABCD)$ nin kaç birim olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

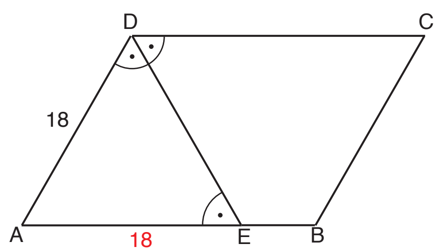
$\widehat{AED}$ ve $\widehat{EDC}$ iç ters açılar olup bu açılarının ölçüleri

birbirine eşittir. Bu durumda $|AE| = |AD| = 18$ br olur.

$|AE| = 3 \cdot |EB|$ olduğundan $|EB| = 6$ br dir.

$|AB| = 18 + 6 = 24$ br olur.

$Ç(ABCD) = 2(18 + 24) = 84$ br olur.



ÖRNEK

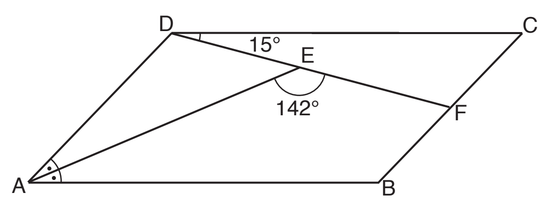
ABCD paralelkenar, $F \in [BC], E \in [DF]$,

$m(\widehat{CDF}) = 15^\circ$, $m(\widehat{AEF}) = 142^\circ$,

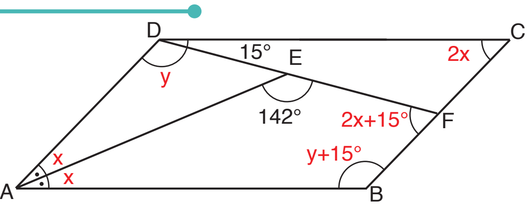
$[AE]$ DAB açısının açıortayıdır.

Yandaki şekle göre $m(\widehat{DCB})$ nün kaç derece

olduğunu bulalım..



ÇÖZÜM



$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{DAE}) = x$ dersek $m(\widehat{DCB}) = 2x$ olur.

$m(\widehat{ADF}) = y$ dersek $m(\widehat{ABC}) = y + 15°$ olur.

$m(\widehat{DFB}) = 2x + 15°$ (Bir dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüsünün toplamına eşittir.)

AEFB dörtgeninde $3x + y + 142° + 15° + 15° = 360° \Rightarrow 3x + y = 188°$

ABCD dörtgeninde $4x + 2y + 30° = 360° \Rightarrow 4x + 2y = 330°$

$$\left.\begin{aligned} -2/\,3x + y &= 188° \\ 4x + 2y &= 330° \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} -6x - \cancel{2y} &= -376° \\ + \quad 4x + \cancel{2y} &= 330° \\ \hline -2x &= -46° \end{aligned}$$

$m(\widehat{DCB}) = 2x = 46°$ bulunur.

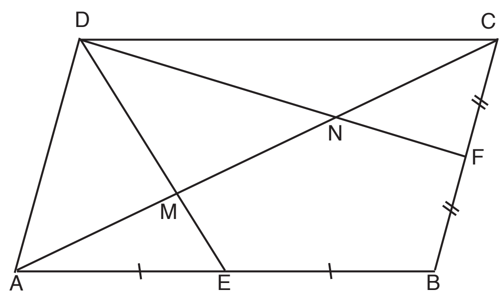
ÖRNEK

Şekildeki ABCD paralelkenarında E ve F bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

$[AC] \cap [DE] = \{M\}$, $[AC] \cap [DF] = \{N\}$

$|ME| = |NF| = 2$ br ve $|AC| = 6$ br ise

$Ç(\widehat{DMN})$ nin kaç birim olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

$[DB]$ köşegeni çizilir. Paralelkenarda köşegenler birbirini ortalayacağından $|DO| = |OB|$ bulunur.

Bu durumda $\widehat{DAB}$ nde M ağırlık merkezi olur.

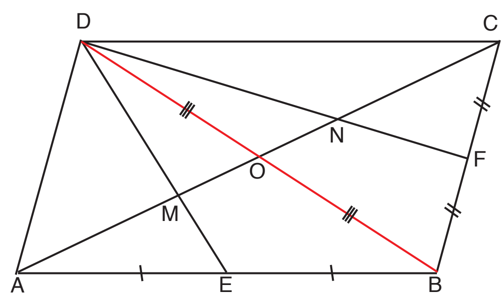
$|ME| = 2$ br ise $|MD| = 4$ br dir.

Aynı şekilde N, $\widehat{DBC}$ nin ağırlık merkezi olur.

Bu durumda $|NF| = 2$ br ise $|DN| = 4$ br olur.

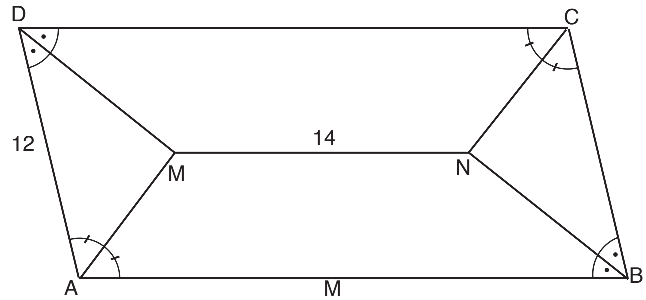
$|AM| = |MN| = |NC|$ olup $|MN| = \dfrac{6}{3} = 2$ br dir.

$Ç(\widehat{DMN}) = 4 + 4 + 2 = 10$ br bulunur.

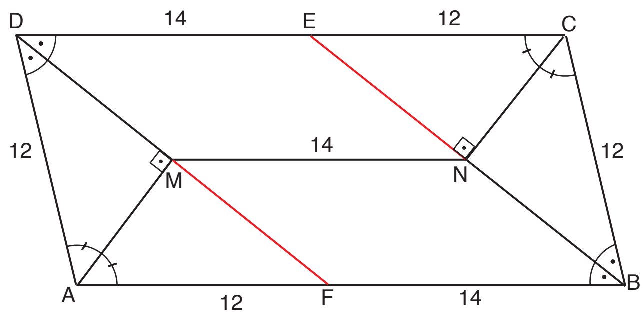


ÖRNEK

ABCD paralelkenar, $[DM]$ ADC açısının, $[CN]$ DCB açısının, $[MA]$ DAB açısının ve $[BN]$ ABC açısının açıortaylarıdır. $|AD| = 12$ br, $|MN| = 14$ br olduğuna göre Ç(ABCD) nin kaç birim olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM



$[DM]$ doğrusunu ve $[BN]$ doğrusunu uzattığımızda sırasıyla $[AB]$ nı F noktasında $[DC]$ nı E noktasında keser.

$m(\widehat{ADC})$ ve $m(\widehat{DAB})$, $m(\widehat{DCB})$ ve $m(\widehat{ABC})$ açıları birbirleriyle bütünler açı oldukları için açıortayları dik kesişir. Yani $[MA] \perp [DF]$ ve $[CN] \perp [EB]$ olur. Bu durumda

$|AD| = |AF| = 12$ br ve $|CE| = |CB| = 12$ br dir.

$|DE| = |FB| = |MN| = 14$ br olur ki $Ç(ABCD) = 2 \cdot (12 + 14) + 2 \cdot 12$

$= 52 + 24 = 76$ br bulunur.

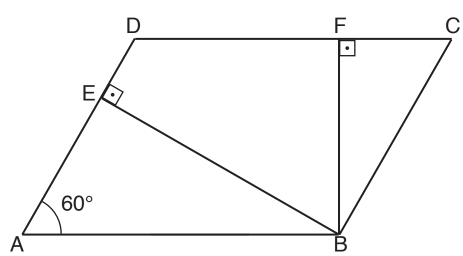
ÖRNEK

ABCD bir paralelkenar,

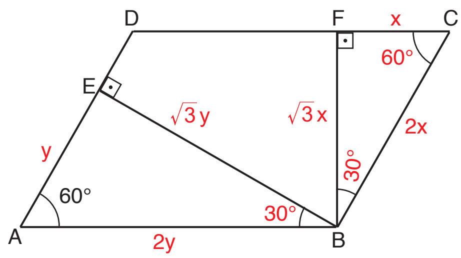
$[BF] \perp [DC]$, $[BE] \perp [AD]$,

$|BE| + |BF| = 16\sqrt{3}$ br,

$m(\widehat{DAB}) = 60°$ olduğuna göre Ç(ABCD) nin kaç birim olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM



$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{DCB}) = 60^\circ$ olduğundan

$m(\widehat{EBA}) = m(\widehat{FBC}) = 30^\circ$ dir.

$|FC| = x$ dersek $|BC| = 2x$ ve $|FB| = \sqrt{3}\,x$ olur.

$|EA| = y$ dersek $|AB| = 2y$ ve $|EB| = \sqrt{3}\,y$ olur.

$|BF| + |BE| = \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,y = \sqrt{3}(x+y) = 16\sqrt{3}$ olup $x + y = 16$ br olur.

$Ç(ABCD) = 4x + 4y = 4(x+y) = 4 \cdot 16 = 64$ br bulunur.

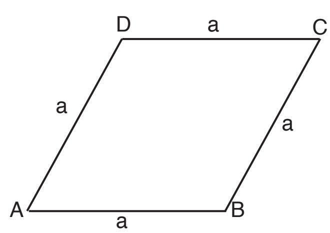
Eşkenar Dörtgen

Bilgi

Karşılıklı kenarları paralel ve tüm kenarlarının uzunlukları eşit olan dörtgene **eşkenar dörtgen** denir.

$[AD] \parallel [BC], [DC] \parallel [AB], |AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$

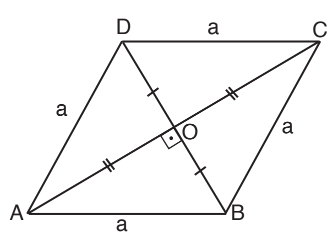
Karşılıklı kenarları paralel olduğundan eşkenar dörtgen özel bir paralelkenardır. Bu nedenle paralelkenarların tüm özelliklerini sağlar.



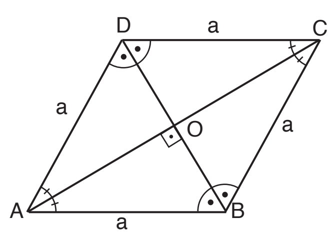
1) Eşkenar dörtgende, köşegenler birbirini dik ortalar.

$[AC] \perp [BD]$, $|OA| = |OC| = \dfrac{|AC|}{2}$ ve $|OB| = |OD| = \dfrac{|BD|}{2}$ dir.

Köşegenler $|AC| = e$, $|BD| = f$ olmak üzere $e^2 + f^2 = 4a^2$ dir.



2) Eşkenar dörtgende köşegenler açıortaydır.

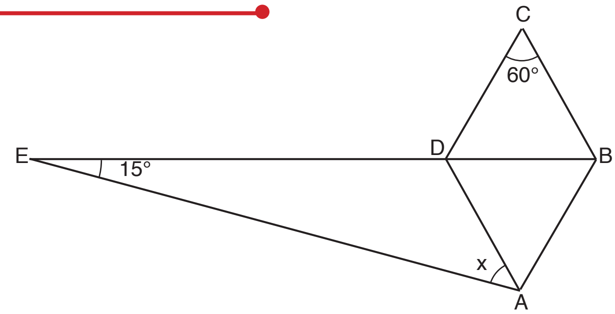


ÖRNEK

ABCD eşkenar dörtgen, E, D ve B noktaları doğrusaldır.

$m(\widehat{DCB}) = 60^\circ$, $m(\widehat{AEB}) = 15^\circ$ ise

$m(\widehat{EAD})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

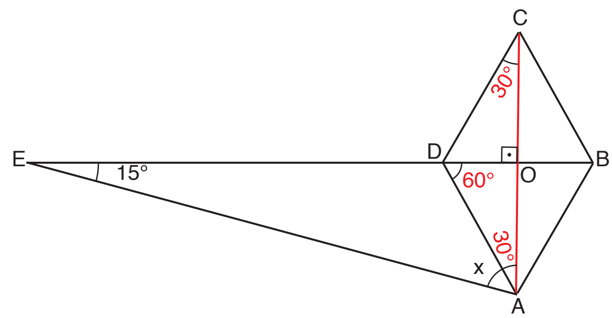


ÇÖZÜM

ABCD eşkenar dörtgeninin $[AC]$ köşegenini çizelim. Eşkenar dörtgende köşegenler birbirini dik ortaladığından $m(\widehat{DOC}) = 90^\circ$ dir.

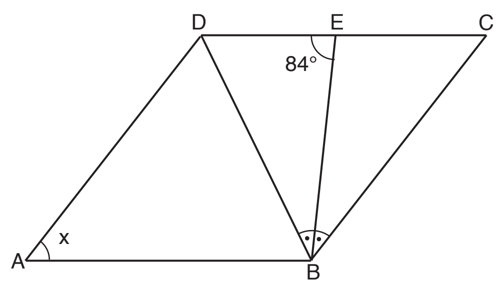
Diğer taraftan eşkenar dörtgende karşılıklı açılar eş ve köşegenler açıortay olduğundan $m(\widehat{DAC}) = 30^\circ$ ve $m(\widehat{ADB}) = 60^\circ$ olur.

$15^\circ + x = 60^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$ bulunur.



ÖRNEK

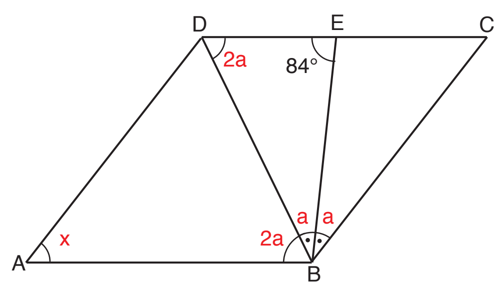
ABCD eşkenar dörtgen, $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{EBC})$, $E \in [DC]$, $m(\widehat{DEB}) = 84^\circ$ ise $m(\widehat{DAB})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

$m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{EBC}) = a$ dersek

$m(\widehat{ABD}) = 2a$ ve $m(\widehat{BDC}) = 2a$ olur.



$\widehat{DBE}$ nde $2a + a + 84^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3a = 96^\circ \Rightarrow a = 32^\circ$ olur.

$m(\widehat{DEB}) = 84^\circ$ ve $m(\widehat{EBC}) = 32^\circ$ ise

$m(\widehat{DCB}) = m(\widehat{DAB}) = x = 84^\circ - 32^\circ$

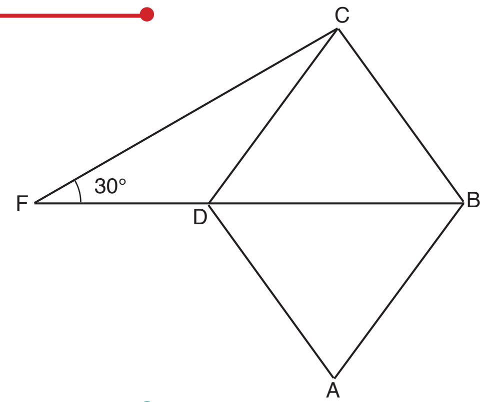
$m(\widehat{DAB}) = x = 52^\circ$ bulunur.

ÖRNEK

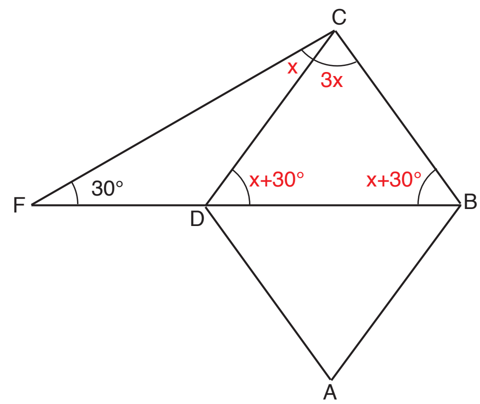
ABCD eşkenar dörtgen, F, D ve B noktaları doğrusaldır.

$m(\widehat{DCB}) = 3m(\widehat{FCD})$, $m(\widehat{CFD}) = 30^\circ$ ise

$m(\widehat{FCD})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM



$m(\widehat{FCD}) = x$ ise $m(\widehat{DCB}) = 3x$ ve

$m(\widehat{CDB}) = x + 30^\circ$ bulunur. Bu durumda,

$m(\widehat{CDB}) = m(\widehat{CBF}) = x + 30^\circ$ olur.

$\widehat{CDB}$ nde $3x + x + 30^\circ + x + 30^\circ = 180^\circ$

$5x = 120^\circ$

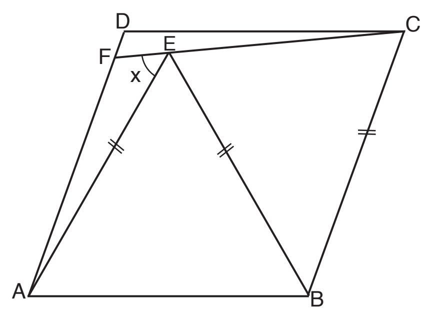
$x = 24^\circ$ bulunur.

ÖRNEK

ABCD eşkenar dörtgen, $F \in [AD], E \in [FC]$,

$|AE| = |BE| = |BC|$, $m(\widehat{ADC}) = 100^\circ$ ise

$m(\widehat{FEA})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

Bir eşkenar dörtgende bütün kenarlar birbirine eşittir.

$|AE| = |BE| = |BC|$ verildiğine göre $|AE| = |BE| = |BC| = |AB|$ olur. Bu durumda $\widehat{EAB}$ eşkenar üçgen olur ve bu üçgenin tüm açılarının ölçüleri 60° dir.

$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ABC}) = 100^\circ$ ve $m(\widehat{EBC}) = 40^\circ$ olur. $\widehat{BEC}$ ikizkenar üçgen olduğundan

$m(\widehat{BEC}) = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$ olur.

$m(\widehat{FEA}) = 180^\circ - (60^\circ + 70^\circ) = 50^\circ$ bulunur.

Etkinlik

◈ Köşegen uzunlukları 12 br ve 16 br olan eşkenar dörtgenin çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu hesaplayınız.

✷ Eşkenar dörtgenin çevre uzunluğunu hesaplarken hangi özellikten faydalandınız? Açıklayınız.

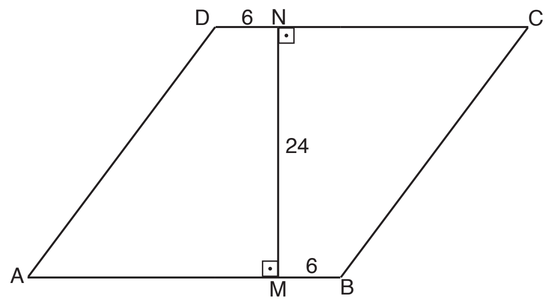
ÖRNEK

ABCD eşkenar dörtgen,

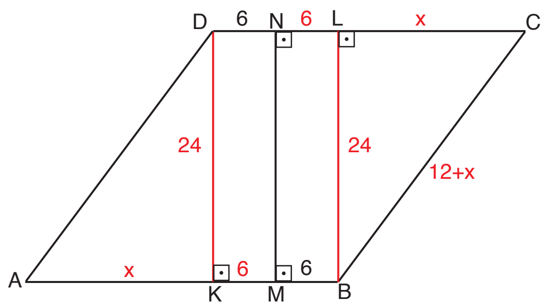
$[NM] \perp [AB]$,

$|DN| = |MB| = 6$ br,

$|MN| = 24$ br olduğuna göre Ç(ABCD) nin kaç birim olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM



B den [DC] na, D den [AB] na dik inerek sırasıyla L ve K noktalarını oluşturalım.

$|KM| = |NL| = 6$ br olur ve $|BL| = |MN| = 24$ br dir.

$|AK| = |LC| = x$ dersek eşkenar dörtgenin kenarlarının uzunlukları eşit olduğundan

$|BC| = 12 + x$ olur.

$\widehat{BLC}$ nde Pisagor teoremini uygularsak

$(12 + x)^2 = 24^2 + x^2$ den,

$(12 + x)^2 - x^2 = 24^2 \Rightarrow (12 + \cancel{x} - \cancel{x})(12 + x + x) = 24^2$

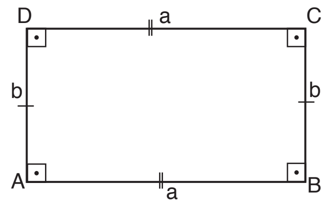
$12 \cdot (12 + 2x) = 24^2 \Rightarrow 12 + 2x = 48 \Rightarrow x = 18$ br bulunur.

$|BC| = 18 + 12 = 30$ br olduğundan

$Ç(ABCD) = 4 \cdot 30 = 120$ br bulunur.

Dikdörtgen

Bilgi



Karşılıklı kenar uzunlukları eşit ve açı ölçüleri 90° olan paralelkenara **dikdörtgen** denir.

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$

$|AB| = |DC| = a, \ |BC| = |AD| = b$

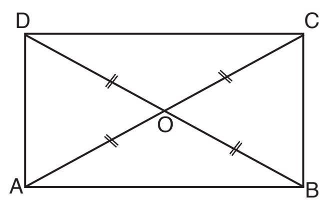
Dikdörtgen özel bir paralelkenar olduğundan paralelkenarın tüm özelliklerini sağlar.

1) Köşegenlerin uzunlukları birbirine eşittir.

$|AC| = |BD| = e, \ |AB| = a, \ |BC| = b$ şeklinde isimlendirirsek

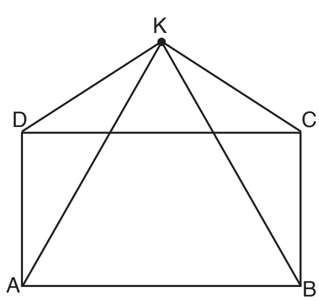
$e^2 = a^2 + b^2$ olur. Köşegenler birbirini ortalar.

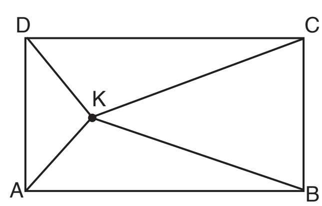
$|OD| = |OC| = |OB| = |OA|$ olur.



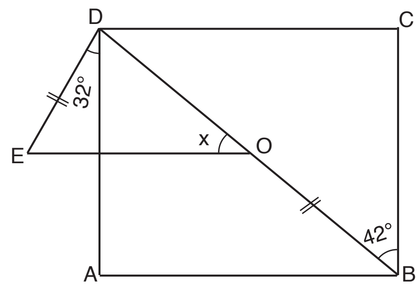
2) Dikdörtgen dışında veya içinde alınan K noktası dikdörtgenin köşeleriyle birleştirildiğinde

$|KA|^2 + |KC|^2 = |KB|^2 + |KD|^2$ olur.





ÖRNEK

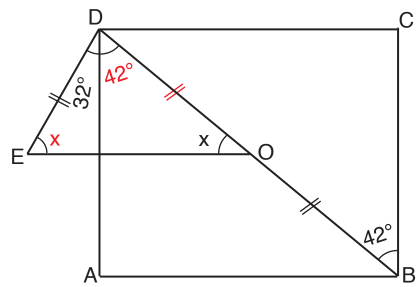


ABCD dikdörtgen, O köşegenlerin kesim noktası,

$|DE| = |OB|$, $m(\widehat{EDA}) = 32^\circ$, $m(\widehat{DBC}) = 42^\circ$

olduğuna göre DOE açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



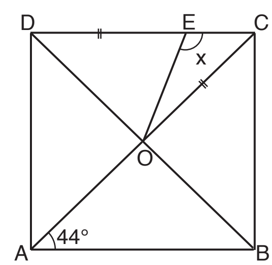
Dikdörtgende köşegenler birbirini ortaladığından

$|DE| = |DO| = |OB|$ olur.

$m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ADB}) = 42^\circ$ (iç ters açılar)

Bu durumda $m(\widehat{DOE}) = x = \dfrac{180^\circ - (32^\circ + 42^\circ)}{2} = 53^\circ$ bulunur.

ÖRNEK

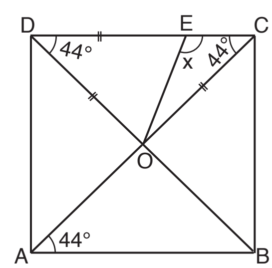


ABCD dikdörtgen, $[AC] \cap [DB] = \{O\}$, $E \in [DC]$,

$m(\widehat{CAB}) = 44^\circ$, $|DE| = |OC|$

olduğuna göre $m(\widehat{OEC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACD}) = 44^\circ$ (iç ters açılar)

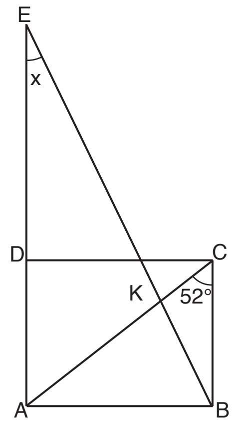
Dikdörtgende köşegenlerin uzunlukları birbirine eşit olduğundan

$|DE| = |OC| = |DO|$ dur. Bu durumda $\widehat{ODC}$ ikizkenar üçgen olup $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BDC}) = 44^\circ$ olur.

$\widehat{DOE}$ ikizkenar üçgen olup $m(\widehat{DOE}) = m(\widehat{OED}) = \dfrac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ$ olur.

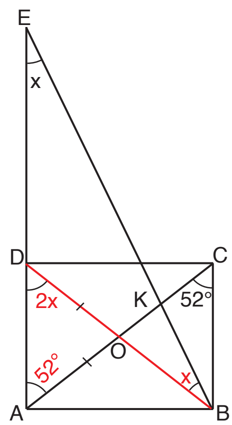
OED ve OEC açıları bütünler açı olduğundan $m(\widehat{OEC}) = x = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$ bulunur.

ÖRNEK



ABCD dikdörtgen, $|ED| = |AC|$, $[AC] \cap [EB] = \{K\}$, $m(\widehat{ACB}) = 52^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{AEB})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$[BD]$ köşegenini çizelim.

Köşegen uzunlukları birbirine eşit olup $|AC| = |DB| = |ED|$ eşitliğinden,

$m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{DBE}) = x$ ve $m(\widehat{ADB}) = 2x$ olur. $m(\widehat{ACB}) = 52^\circ$ ise $m(\widehat{EAC}) = 52^\circ$ olur.

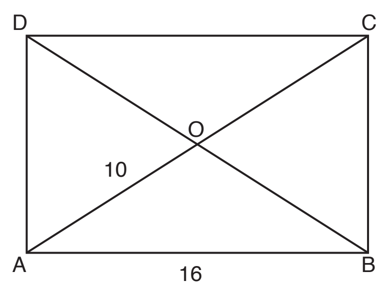
$\widehat{ODA}$ ikizkenar üçgen olduğundan $2x = 52^\circ$ ve $m(\widehat{AEB}) = x = 26^\circ$ bulunur.

Etkinlik

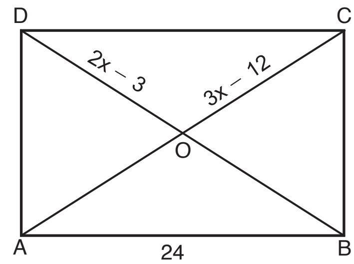
ABCD dikdörtgeni veriliyor.

◈ $|AO| = 10$ br, $|AB| = 16$ br ise ABCD dikdörtgeninin çevre uzunluğunun kaç br olduğunu bulunuz.

✷ Dikdörtgenin çevreçevre uzunluğunun kaç br olduğunu hesaplarken hangi özellikleri kullandınız? Açıklayınız.



ÖRNEK



ABCD dikdörtgen, O noktası köşegenlerin kesim noktası, $|OD| = 2x - 3$ br, $|OC| = 3x - 12$ br, $|AB| = 24$ br olduğuna göre Ç(ABCD) nin kaç birim olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$|OC| = |OD|$ olduğundan $3x - 12 = 2x - 3 \Rightarrow x = 9$ dur.

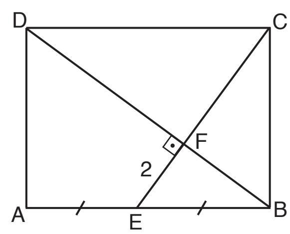
$|OC| = 3 \cdot 9 - 12 = 15$ br ve $|OC| = |OA| = 15$ ve $|AC| = 30$ br dir.

$|AC| = 30$ br, $|AB| = 24$ br olduğundan ABC dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow 30^2 = 24^2 + |BC|^2 \Rightarrow |BC| = 18$ br olur.

$Ç(ABCD) = 2(18 + 24) = 84$ br bulunur.

ÖRNEK



ABCD dikdörtgen, $[CE] \cap [DB] = \{F\}$, $[BD] \perp [CE]$, $|AE| = |EB|$, $|EF| = 2$ br ise $|AB|$ nun kaç birim olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$|AE| = |EB| = a$ dersek $|DC| = 2a$ olur.

Bu durumda $|EF| = 2$ br ise $\widehat{EBF} \sim \widehat{CDF}$ olduğundan

$\dfrac{|EB|}{|CD|} = \dfrac{|EF|}{|CF|}$ olur. $\dfrac{\cancel{a}}{2\cancel{a}} = \dfrac{2}{|CF|}$ ise $|CF| = 4$ br olur.

EBC dik üçgeninde $|FB|^2 = 2 \cdot 4 = 8 \Rightarrow |FB| = 2\sqrt{2}$ br (Öklid teoreminden),

EBF dik üçgeninde $|EB|^2 = 2^2 + (2\sqrt{2})^2 = 4 + 8 = 12 \Rightarrow |EB| = 2\sqrt{3}$ br (Pisagor teoreminden)

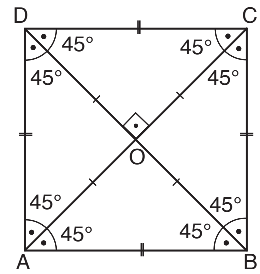
$|AB| = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ br bulunur.

Kare

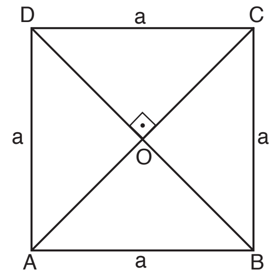
Bilgi

Tüm kenar uzunlukları eşit olan dikdörtgene **kare** denir. Dikdörtgenin tüm özelliklerini, paralelkenarın ve kenar uzunlukları eşit olduğundan da eşkenar dörtgenin tüm özelliklerini sağlar.

1) Köşegenler açıortaydır ve birbirini dik ortalar.



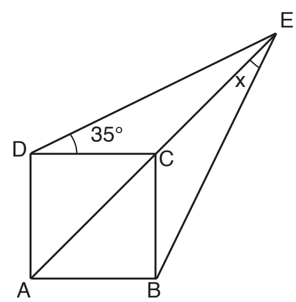
2) $|AB| = a, |DB| = |AC| = e$ olmak üzere $e = a\sqrt{2}$ dir.



ÖRNEK

A, C ve E doğrusal,

ABCD kare, $m(\widehat{EDC}) = 35°$ ise $m(\widehat{AEB})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

E noktası köşegen üzerinde olup D ve B noktalarına eşit uzaklıktadır.

Bu durumda $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{CBE}) = 35°$,

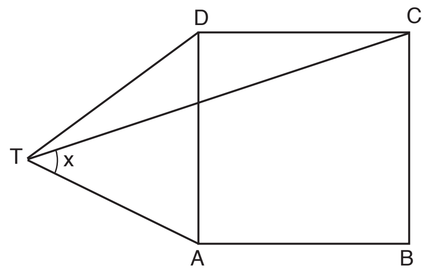
$m(\widehat{ACB}) = 45°$ ise $m(\widehat{BCE}) = 135°$ olur.

$\widehat{BCE}$ nde $m(\widehat{AEB}) = 180° - (135° + 35°) = 10°$ bulunur.

ÖRNEK

ABCD kare, $|TD| = |BC|$ ise

$m(\widehat{ATC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.



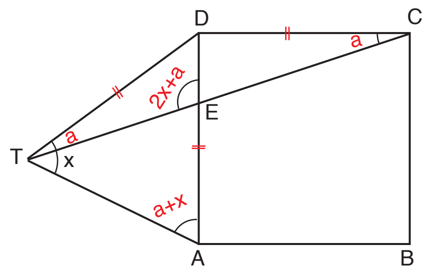
ÇÖZÜM

$|TD| = |AB| = |AD| = |DC|$ olur.

$m(\widehat{DTC}) = m(\widehat{DCT}) = a$ dersek, $m(\widehat{TAD}) = a + x$ tir.

Bu durumda,

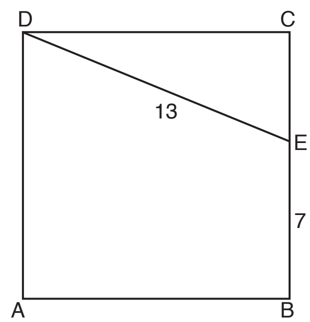
$m(\widehat{TED}) = 2x + a$ ve $2x + \cancel{a} = \cancel{a} + 90° \Rightarrow x = 45°$ bulunur.



Etkinlik

◈ ABCD kare, $E \in [BC]$, $|EB| = 7$ br, $|DE| = 13$ br olduğuna göre ABCD karesinin çevresinin uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

✷ ABCD karesinin çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu bulurken hangi teoremi kullandınız? Açıklayınız.

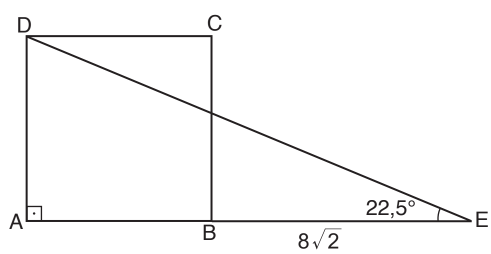


ÖRNEK

ABCD kare, A, B ve E noktaları doğrusal,

$m(\widehat{E}) = 22,5°$, $|BE| = 8\sqrt{2}$ br olduğuna göre

Ç(ABCD) nin kaç birim olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

BD köşegenini çizersek açıortay olacağından,

$m(\widehat{BDE}) = 180° - (135° + 22{,}5°) = 22{,}5°$

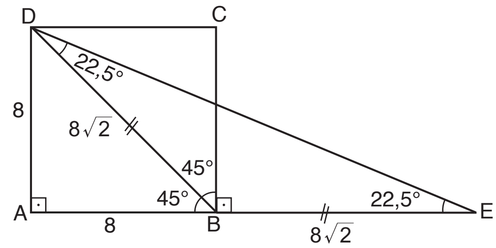
Bu durumda BED üçgeni ikizkenar üçgen olur.

$|BE| = |BD| = 8\sqrt{2}$ dir.

ABD üçgeni ikizkenar dik üçgen olduğu için

$|AB| = |AD| = 8$ br olur. Buradan

$Ç(ABCD) = 4 \cdot 8 = 32$ br bulunur.



Deltoid

Bilgi

Tabanları ortak iki ikizkenar üçgenin birleşiminin oluşturduğu dörtgene **deltoid** denir.

1) $|DA| = |BA|$ ve $|DC| = |BC|$

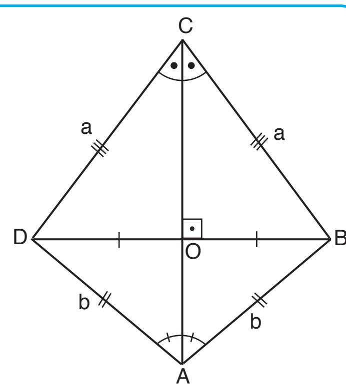
2) $[AC] \perp [BD]$

3) $|DO| = |OB|$

4) $m(\widehat{CDA}) = m(\widehat{CBA})$

5) $[CA]$ köşegeni açıortaydır.

6) Kenar orta noktaları birleştirilerek elde edilen dörtgen, bir dikdörtgendir.

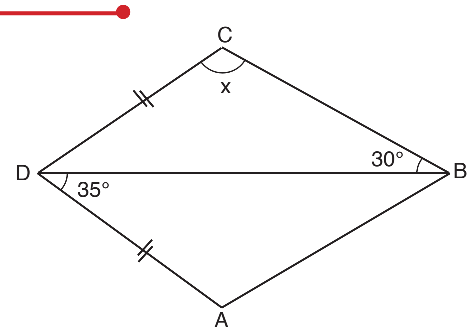


ÖRNEK

ABCD deltoidinde, $|CD| = |DA|$,

$m(\widehat{ADB}) = 35°$, $m(\widehat{CBD}) = 30°$ ise

$m(\widehat{DCB})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

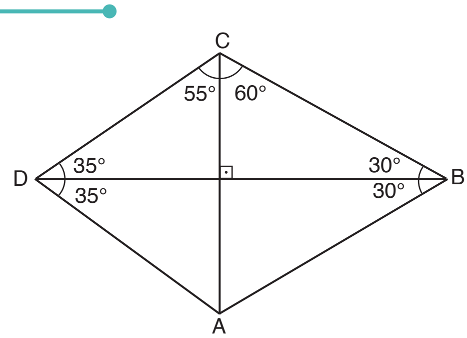


ÇÖZÜM

DB köşegeni açıortaydır.

$m(\widehat{BDC}) = 35°$, $m(\widehat{DBA}) = 30°$ dir.

Bu durumda $m(\widehat{DCA}) = 55°$ ve $m(\widehat{ACB}) = 60°$ olduğundan $m(\widehat{DCB}) = x = 55° + 60° = 115°$ bulunur.

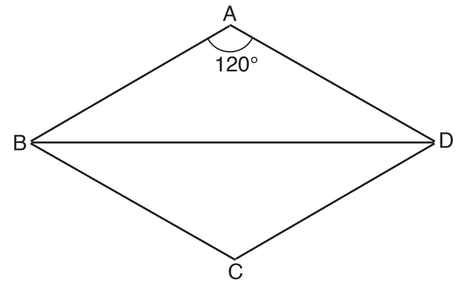


ÖRNEK

ABCD deltoidinde, $|AB| = |BC|$,

$m(\widehat{BAD}) = 120°$, $m(\widehat{B}) = 3m(\widehat{D})$ ise

$m(\widehat{ABC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

$m(\widehat{D}) = \alpha$, $m(\widehat{B}) = 3\alpha$ ve $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{BCD}) = 120°$ olduğundan

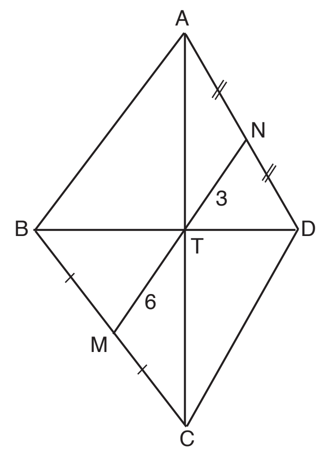
$120° + 120° + \alpha + 3\alpha = 360° \Rightarrow 4\alpha = 120° \Rightarrow \alpha = 30°$ olur. $m(\widehat{B}) = 3 \cdot 30° = 90°$ bulunur.

ÖRNEK

ABCD deltoidinde, $[AC] \cap [BD] = \{T\}$,

$|AB| = |BC|$, M ve N üzerinde buldukları kenarların orta noktalarıdır.

$|TN| = 3$ br, $|TM| = 6$ br ise $Ç(ABCD)$ nin kaç birim olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

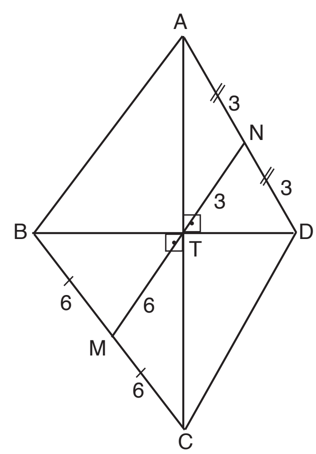
$[AC] \perp [BD]$ olduğundan $\widehat{ATD}$ dik üçgen olup $[TN]$, bu üçgenin hipotenüse ait kenarortayıdır.

$|TN| = |NA| = |ND| = 3$ br dir. Diğer taraftan $\widehat{TBC}$ dik üçgen olup $[TM]$, bu üçgenin hipotenüse ait kenarortayıdır.

$|TM| = |MB| = |MC| = 6$ br dir. Bu durumda

$|DA| = |DC| = 6$ br, $|BA| = |BC| = 12$ br olup

$Ç(ABCD) = 2(6 + 12) = 36$ br bulunur.



Etkinlik

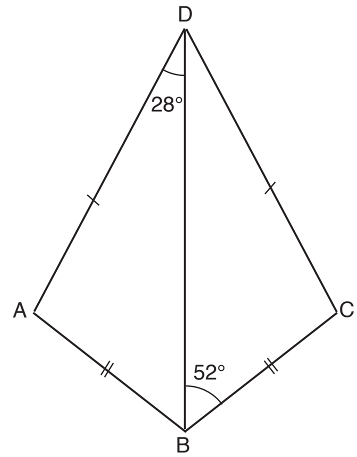
ABCD deltoidinde $|AD| = |DC|$

$m(\widehat{ADB}) = 28^\circ$ ve $m(\widehat{DBC}) = 52^\circ$ dir.

✷ $m(\widehat{A})$ nün kaç derece olduğunu hesaplayınız.

✷ $m(\widehat{C})$ nün kaç derece olduğunu hesaplayınız.

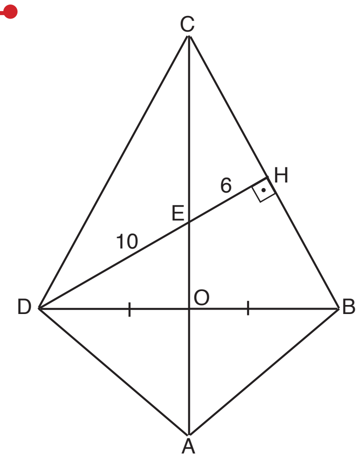
✷ Açıların ölçülerinin kaç derece olduğunu hesaplarken hangi kurallara dikkat ettiniz? Açıklayınız.



ÖRNEK

Şekildeki ABCD deltoidinde, O noktası köşegenlerin kesim noktası, $E \in [AC]$, $|AD| = |AB|$, $[DH] \perp [BC]$, $|DO| = |OB|$, $|HB| = |OA|$, $|EH| = 6$ br, $|DE| = 10$ br ise

Ç(ABCD) nin kaç birim olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

E ve B noktalarını birleştirelim. $|ED| = |EB| = 10$ br,

$|HB| = 8$ br dir. $\widehat{BDH}$ nde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|DB|^2 = 16^2 + 8^2 = 320$ ise $|DB| = 8\sqrt{5}$ olur.

$|OD| = |OB| = 4\sqrt{5}$ dir. $\widehat{DOA}$ nde Pisagor teoremi uygulandığında

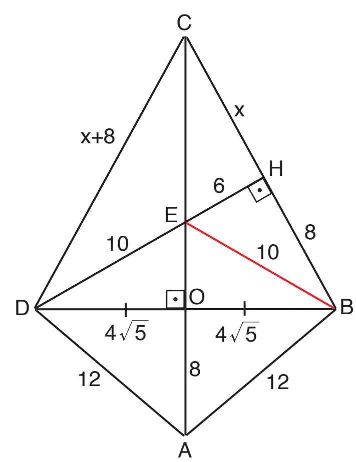
$|AD|^2 = (4\sqrt{5})^2 + 8^2 = 144$ ve $|AD| = |AB| = 12$ br olur.

$|CH| = x$ dersek $|CD| = x + 8$ olur.

$\widehat{CHD}$ nde Pisagor teoremi uygulanırsa

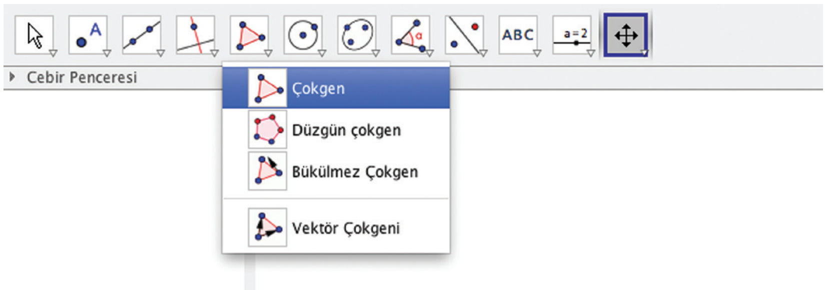
$(x+8)^2 = x^2 + 16^2 \Rightarrow \cancel{x^2} + 16x + 64 = \cancel{x^2} + 256$

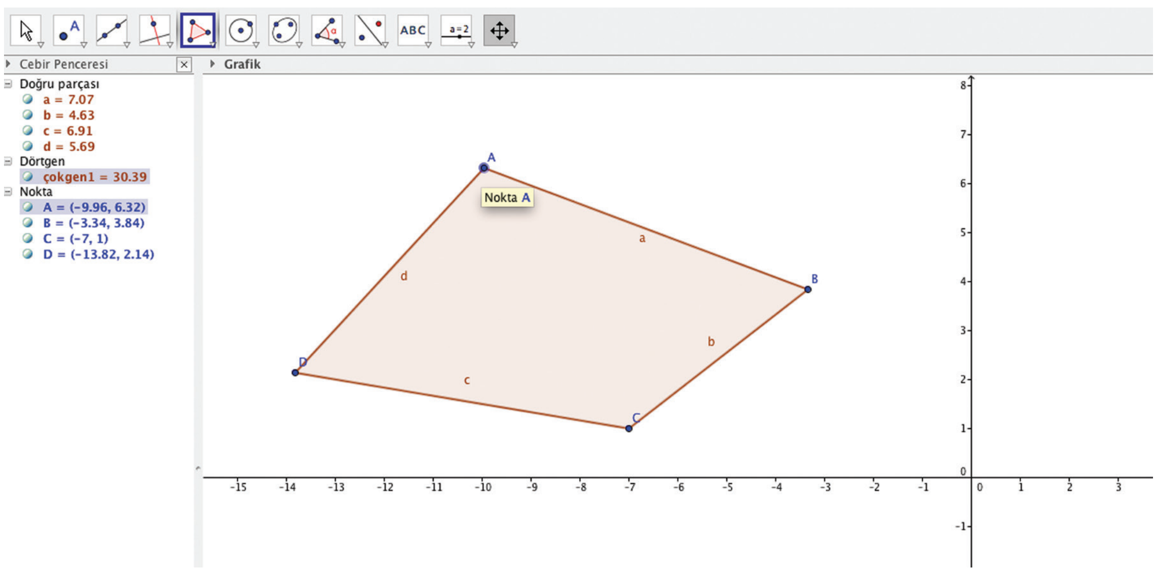
$16x = 192 \Rightarrow x = 12$ br ve $Ç(ABCD) = 2(12 + 20) = 64$ br bulunur.



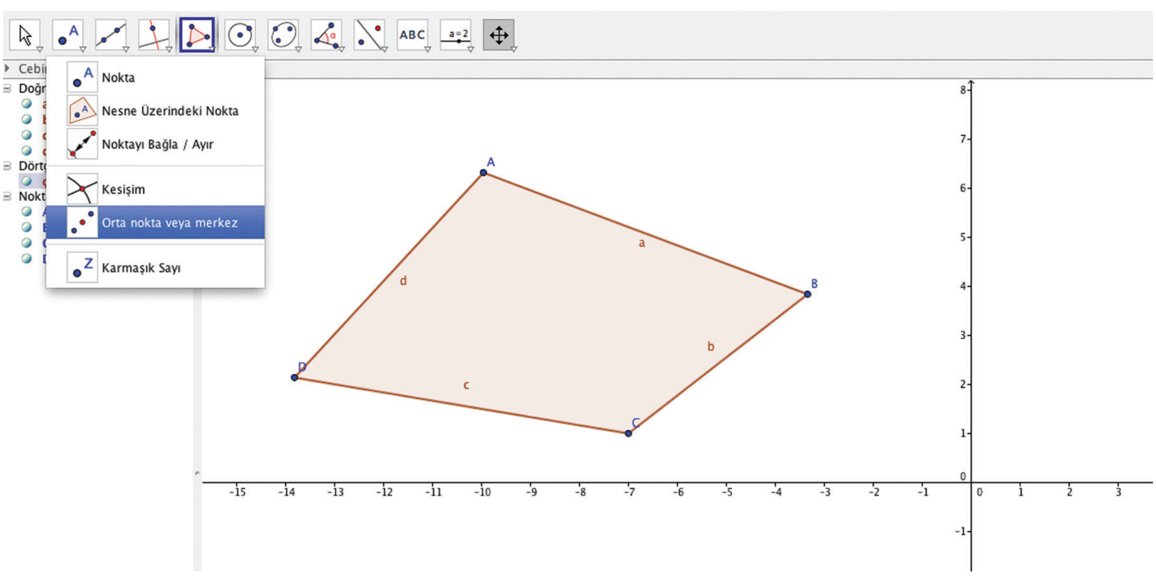
Bilgi İletişim Teknolojisi

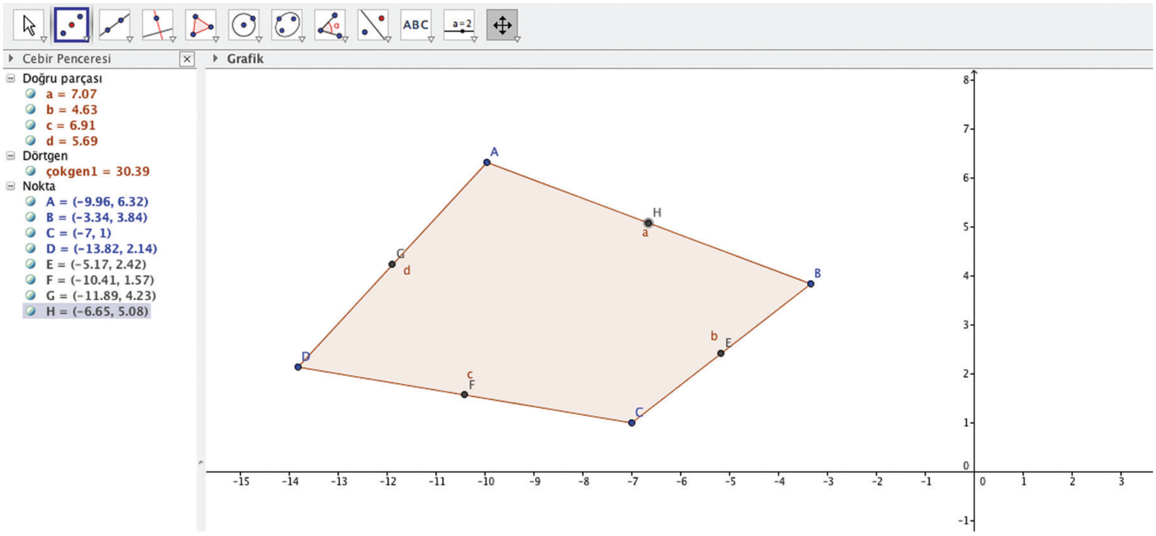
1. Daha önce bilgisayarınıza indirmiş olduğunuz “GeoGebra” programı çalıştırınız
2. “Çokgen” butonuna basınız ve herhangi 4 nokta belirleyerek bir dörtgen çiziniz.



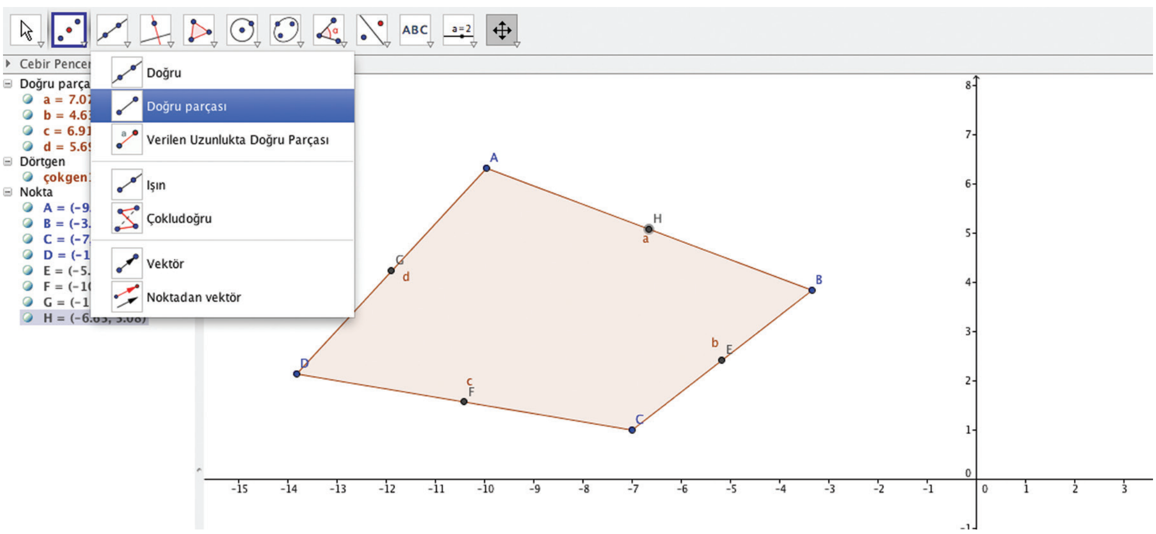


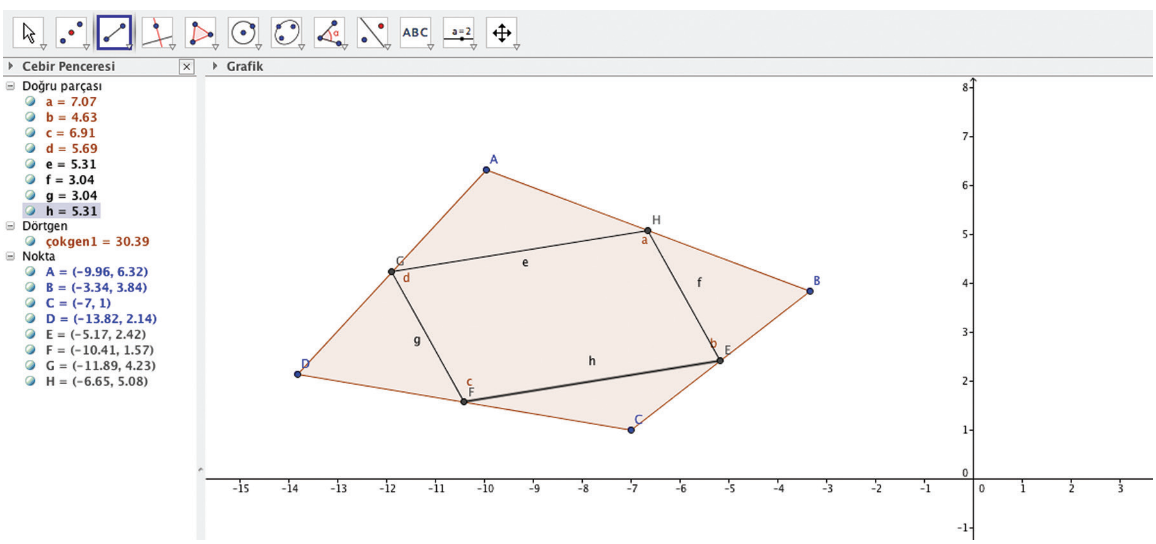
3. “Orta nokta veya merkez” butonuna basınız ve kenarlara tıklayarak kenar orta noktalarını belirleyiniz.





4. “Doğru parçası” butonuna basınız ve kenar orta noktalarını ardışık olarak birleştiriniz.



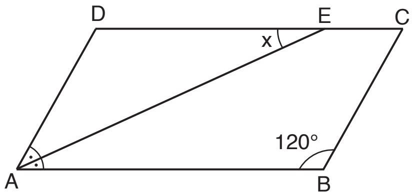


5. Yeni bir dörtgen yani paralelkenar oluşturdunuz.

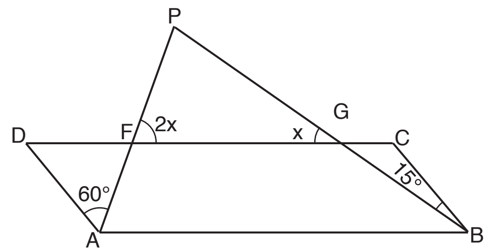
Siz de dörtgenlerin açı, kenar ve köşegen özelliklerini bu program yardımıyla açıklayabilirsiniz.

Alıştırmalar 5-4

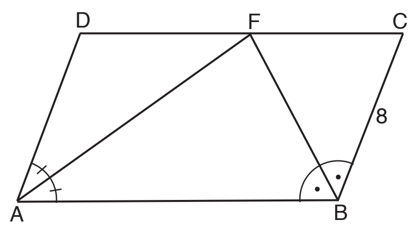
1) ABCD paralelkenar, $E \in [DC]$,
$[AE]$, $\widehat{DAB}$ nın açıortayı,
$m(\widehat{ABC}) = 120°$ ise $m(\widehat{AED})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



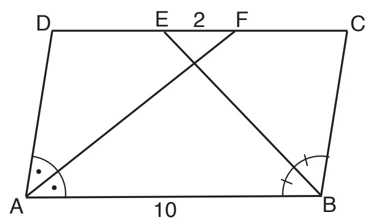
2) ABCD paralelkenar, APB üçgen,
$G \in [DC], F \in [DC]$,
$m(\widehat{DAF}) = 60°$, $m(\widehat{GFP}) = 2x$,
$m(\widehat{CBG}) = 15°$ ise $m(\widehat{FGP})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



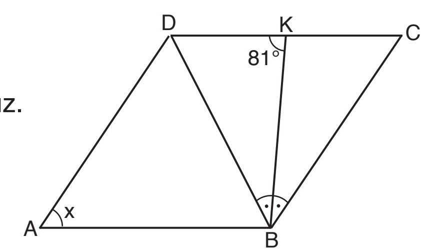
3) ABCD paralelkenar, $F \in [DC]$, $|BC| = 8$ br,
$[BF]$ B açısının, $[AF]$ A açısının açıortayı ise
$Ç(ABCD)$ nin kaç birim olduğunu bulunuz.



4) ABCD paralelkenar, $E \in [DC], F \in [DC]$,
$[AF]$ A açısının, $[BE]$ B açısının açıortayı,
$|EF| = 2$ br, $|AB| = 10$ br ise $Ç(ABCD)$ nin kaç birim olduğunu bulunuz.

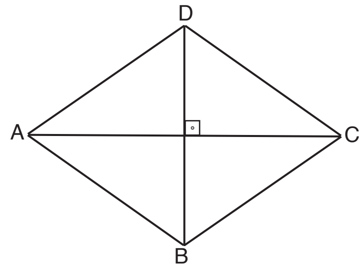


5) ABCD eşkenar dörtgen, $K \in [DC]$, $m(\widehat{CBK}) = m(\widehat{DBK})$,
$m(\widehat{DKB}) = 81°$ ise $m(\widehat{DAB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



6) ABCD eşkenar dörtgen, $|AC|^2 + |BD|^2 = 144$ br ise

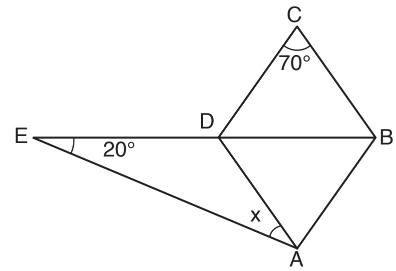
Ç(ABCD) nin kaç birim olduğunu bulunuz.



7) ABCD eşkenar dörtgen, E, D, B noktaları doğrusal,

$m(\widehat{DCB}) = 70°$, $m(\widehat{AEB}) = 20°$ ise

$m(\widehat{EAD})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



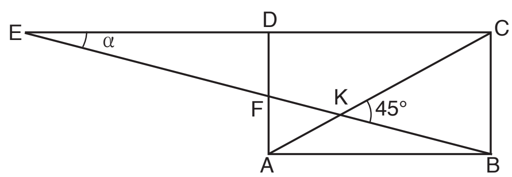
8) Köşegen uzunlukları 10 br ve 20 br olan eşkenar dörtgenin çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

9) ABCD dikdörtgen, C, D, E noktaları doğrusal,

$m(\widehat{CKB}) = 45°$, $F \in [AD]$, $[AC] \cap [BE] = \{K\}$

$|ED| = |AC|$ olduğuna göre

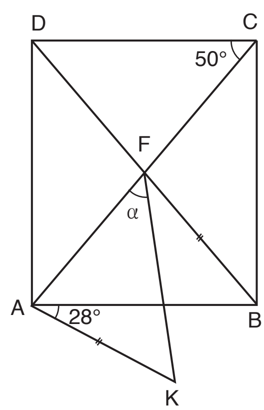
$m(\widehat{BEC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



10) ABCD dikdörtgen, $|FB| = |AK|$, $[AC] \cap [DB] = \{F\}$

$m(\widehat{DCA}) = 50°$, $m(\widehat{BAK}) = 28°$

olduğuna göre $m(\widehat{AFK})$ nün kaç derece olduğunu.bulunuz.

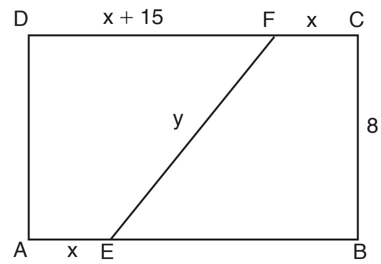


11) Köşegen uzunluğu 13 br, kısa kenar uzunluğu 8 br olan dikdörtgenin çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

12) ABCD dikdörtgen, $F \in [DC], E \in [AB]$,

$|DF| = (x + 15)$ br, $|FC| = |AE| = x$ br,

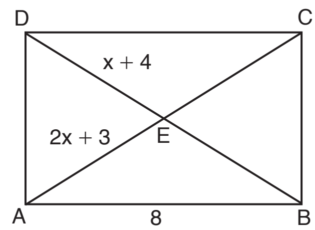
$|BC| = 8$ br olduğuna göre $|EF|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.



13) ABCD dikdörtgen, E noktası köşegenlerin kesim noktası,

$|DE| = x + 4$ br, $|AE| = 2x + 3$ br,

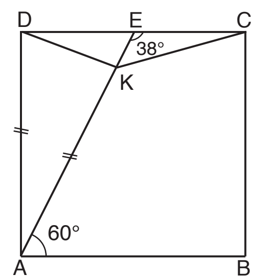
$|AB| = 8$ br olduğuna göre $|BC|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.



14) ABCD kare; A, K ve E noktaları doğrusal, $E \in [DC]$

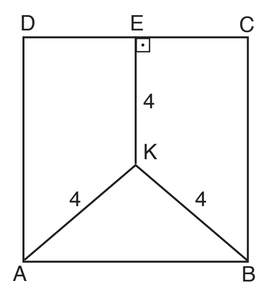
$m(\widehat{BAE}) = 60°$, $m(\widehat{KEC}) = 38°$,

$|AD| = |AK|$ olduğuna göre $m(\widehat{KCD})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



15) ABCD kare, $[KE] \perp [DC]$, $|EK| = |AK| = |KB| = 4$ br

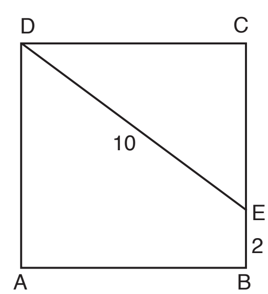
olduğuna göre $Ç(ABCD)$ nin kaç birim olduğunu bulunuz.



16) Köşegen uzunluğu $12\sqrt{2}$ br olan karenin çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

17) ABCD kare, $E \in [BC]$, $|EB| = 2$ br, $|DE| = 10$ br ise

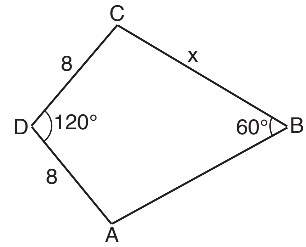
$Ç(ABCD)$ nin kaç birim olduğunu bulunuz.



18) ABCD deltoid,

$m(\widehat{ADC}) = 120^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$,

$|AD| = |DC| = 8$ br ise $|BC|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.

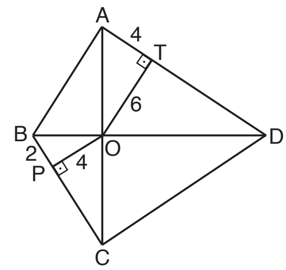


19) ABCD deltoid, O noktası köşegenlerin kesim noktası,

$|AB| = |BC|$, $[OT] \perp [AD]$, $[OP] \perp [BC]$

$|AT| = 4$ br, $|OT| = 6$ br, $|BP| = 2$ br, $|OP| = 4$ br

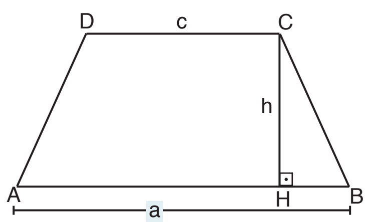
olduğuna göre $Ç(ABCD)$ nin kaç birim olduğunu bulunuz.



Özel Dörtgenlerde Alan

Yamuk

Bilgi

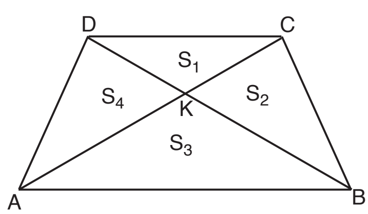


$[AB] \parallel [DC]$,

$|DC| = c$, $|CH| = h$ ve $|AB| = a$ olmak üzere

$$A(ABCD) = \frac{(a+c)\cdot h}{2}$$

1)



$[AC] \cap [DB] = \{K\}$, $A(\widehat{KDC}) = S_1$, $A(\widehat{KCB}) = S_2$,

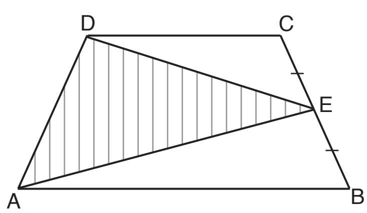
$A(\widehat{KBA}) = S_3$, $A(\widehat{KAD}) = S_4$ olmak üzere

a) $S_2 = S_4$

b) $S_2 = S_4 = \sqrt{S_1 \cdot S_3}$

c) $A(ABCD) = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})^2$

2)



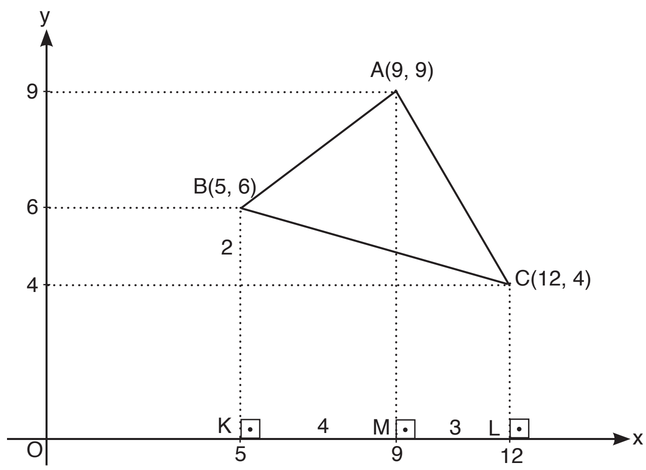
ABCD yamuk, $E \in [BC]$ ve $|BE| = |EC|$

ise $A(\widehat{ADE}) = \dfrac{1}{2} A(ABCD)$ olur.

ÖRNEK

Köşelerinin koordinatları $A(9,9), B(5,6), C(12,4)$ olan üçgenin alanının kaç br^2 olduğunu hesaplayalım.

ÇÖZÜM



$$A(\widehat{ABC}) = A(KMAB) + A(MLCA) - A(KBCL)$$
$$= \frac{(6+9)\cdot 4}{2} + \frac{(9+4)\cdot 3}{2} - \frac{(6+4)\cdot 7}{2} = \frac{15\cdot 4}{2} + \frac{13\cdot 3}{2} - \frac{10\cdot 7}{2} = \frac{29}{2}\ br^2 \text{ bulunur.}$$

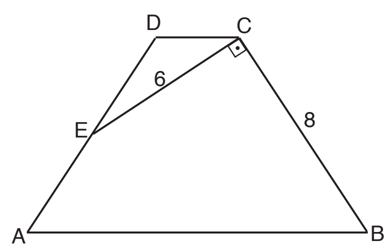
ÖRNEK

ABCD yamuk, $E \in [AD]$,

$[AB] \parallel [CD]$, $[EC] \perp [BC]$, $|ED| = |EA|$,

$|EC| = 6\ br$, $|BC| = 8\ br$ ise

$A(ABCD)$ nin kaç br^2 olduğunu bulalım.

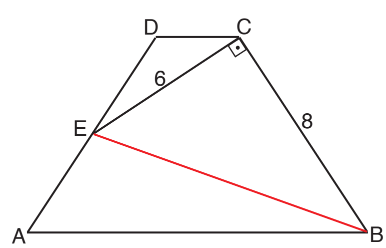


ÇÖZÜM

E ile B yi birleştirirsek oluşan dik üçgende,

$A(\widehat{CEB}) = \frac{6\cdot 8}{2} = 24\ br^2$ olur.

$A(ABCD) = 2\cdot 24 = 48\ br^2$ bulunur.



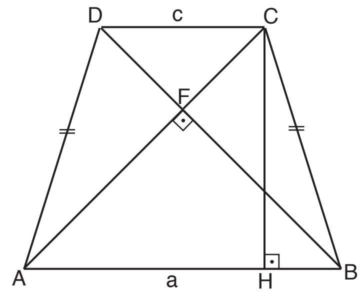
ÖRNEK

ABCD ikizkenar yamuk, $[AC] \cap [DB] = \{F\}$,

$|AB| = a, |DC| = c$, $[AB] \parallel [CD]$, $[AC] \perp [BD]$,

$|AD| = |BC|$, $[CH] \perp [AB]$, $a + c = 8$ br ise

A(ABCD) nın kaç br^2 olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

Köşegenleri birbirine dik ikizkenar yamukta, $h = \frac{a+c}{2} = \frac{8}{2} = 4$ olur.

$A(ABCD) = \frac{(a+c)\cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 4 \cdot 4 = 16\ br^2$ bulunur.

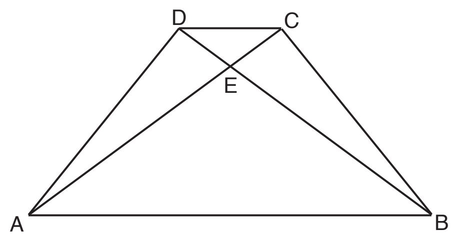
ÖRNEK

ABCD yamuk, E noktası köşegenlerin kesim noktası

$[DC] \parallel [AB]$, $A(\widehat{EDC}) = 2\ br^2$,

$A(\widehat{EAB}) = 8\ br^2$ ise

A(ABCD) nın kaç br^2 olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

I. yol

$A(\widehat{EDA}) = A(\widehat{ECB}) = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$ olur.

$A(ABCD) = 2 \cdot 4 + 2 + 8 = 18\ br^2$ bulunur.

II. yol

$A(ABCD) = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})^2$

$= (\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18\ br^2$ bulunur.

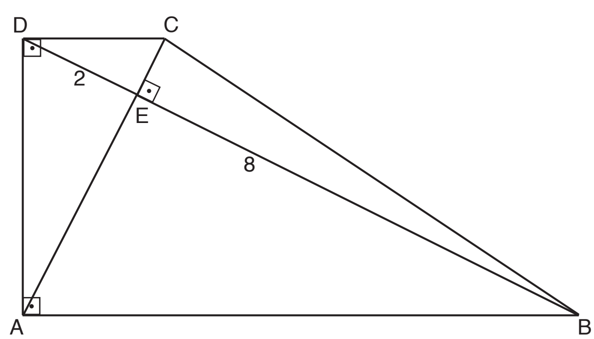
ÖRNEK

ABCD dik yamuk, E noktası köşegenlerin kesim noktası, $[AB] \parallel [CD]$,

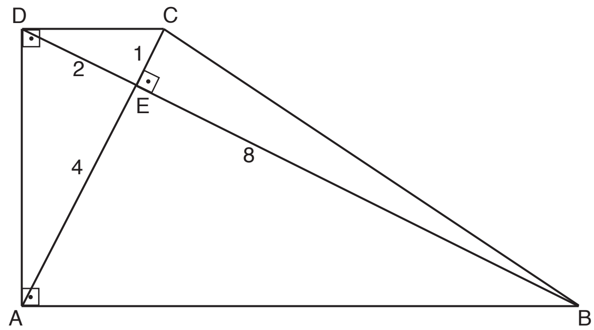
$[AB] \perp [AD]$, $[AC] \perp [DB]$,

$|DE| = 2$ br, $|EB| = 8$ br ise

A(ABCD) nın kaç br^2 olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM



$\overset{\frown}{ABD}$ nde Öklit teoremi uygulanırsa

$|AE|^2 = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow |AE| = 4$ br bulunur.

$\overset{\frown}{DAC}$ nde Öklit teoremi uygulanırsa

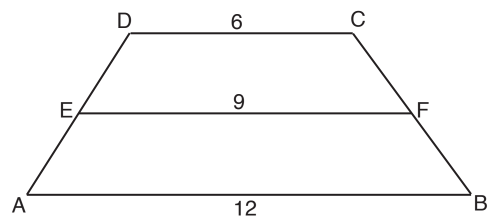
$2^2 = 4 \cdot |EC| \Rightarrow |EC| = 1$ br olur.

$A(ABCD) = A(\overset{\frown}{ADB}) + A(\overset{\frown}{CDB})$

$= \dfrac{10 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} + \dfrac{10 \cdot 1}{2}$

$= 20 + 5 = 25$ br^2 bulunur.

ÖRNEK



ABCD yamuk, $E \in [AD]$, $F \in [BC]$,

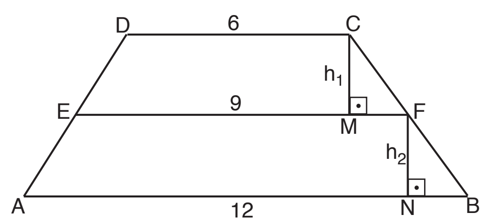
$[DC] \parallel [EF] \parallel [AB]$,

$A(EFCD) = 30$ br^2,

$|DC| = 6$ br, $|EF| = 9$ br, $|AB| = 12$ br ise

$A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$9 = \dfrac{6 + 12}{2}$ olup $[EF]$, orta tabandır.

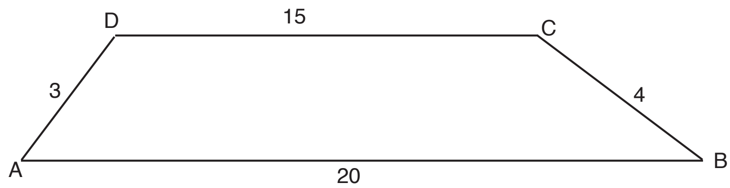
Bu durumda $h_1 = h_2$ olmalıdır.

$A(EFCD) = \dfrac{(9 + 6) \cdot h_1}{2} = 30 \Rightarrow h_1 = 4 \text{ br} = h_2$

$A(ABFE) = \dfrac{(12 + 9) \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} = 42$ br^2 olur. Buradan,

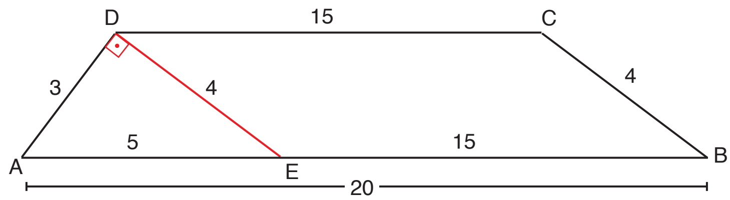
$A(ABCD) = 30 + 42 = 72$ br^2 bulunur.

ÖRNEK



ABCD yamuğunda, $|AB| = 20$ br, $|CB| = 4$ br, $|CD| = 15$ br, $|AD| = 3$ br ise $A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulalım.

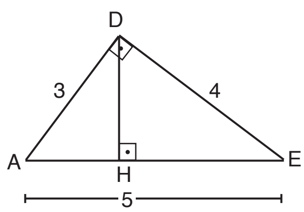
ÇÖZÜM



$[CB]$ na paralel olarak $[DE]$ nı çizelim.

$|BC| = |DE| = 4$ br, $|EB| = 15$ br ve

$|AE| = 5$ br olup $\widehat{DAE}$ dik üçgendir. $[AD] \perp [DE]$ olur.



Öklid teoreminden

$3 \cdot 4 = 5 \cdot |DH|$ ve $|DH| = \dfrac{12}{5}$ olur.

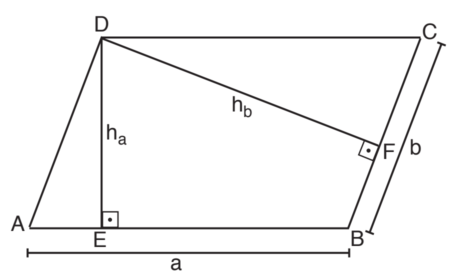
$A(ABCD) = (20+15) \cdot \dfrac{12}{5 \cdot 2} = \dfrac{\overset{7}{\cancel{35}} \cdot \overset{6}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = 42\text{ br}^2$ bulunur.

Paralelkenar

Bilgi

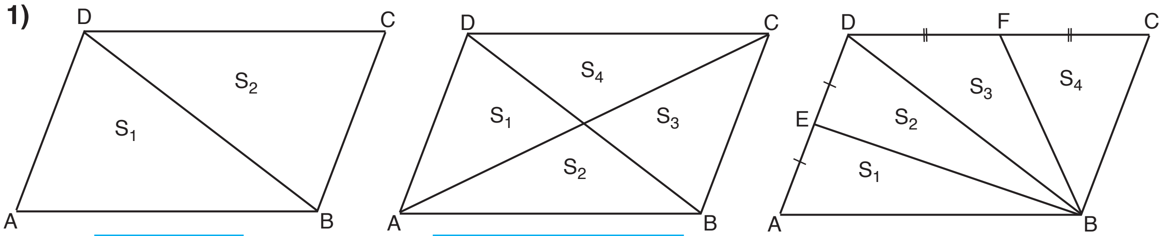
Paralelkenarın farklı kenar uzunlukları a ve b, bunlara ait yükseklikler h_a ve h_b olmak üzere;

$A(ABCD) = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ olur.



Herhangi bir paralelkenarda;

1)

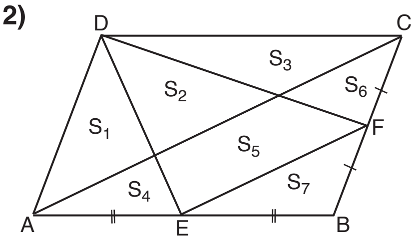


$|AE| = |ED|$ ve $|DF| = |FC|$

$\boxed{S_1 = S_2}$ $\quad$ $\boxed{S_1 = S_2 = S_3 = S_4}$ $\quad$ $\boxed{S_1 = S_2 = S_3 = S_4}$ olur.

$A(ABCD) = S$ olmak üzere;

2)



E ve F noktaları bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

a) $S_1 = S_2 = S_3 = \dfrac{S}{6}$,

b) $S_4 = S_6 = \dfrac{S}{12}$,

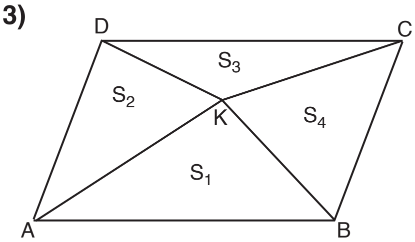
c) $S_1 + S_4 = S_3 + S_6 = \dfrac{S}{4}$,

ç) $S_2 + S_5 + S_7 = \dfrac{S}{2}$,

d) $S_2 + S_5 = \dfrac{3}{8}S$,

e) $S_5 + S_7 = \dfrac{S}{3}$ olur.

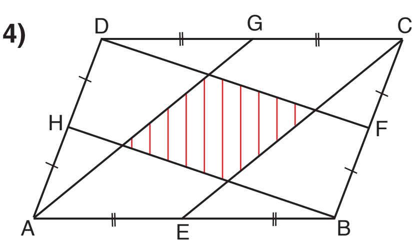
3)



K, paralelkenar içinde alınan herhangi bir nokta olmak üzere;

$S_1 + S_3 = S_2 + S_4$ olur.

4)



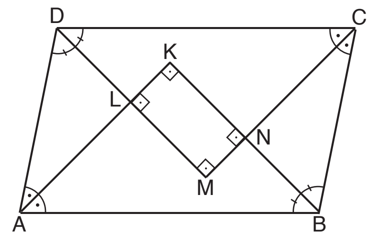
$|AH| = |HD| = |CF| = |BF|$ ve $|AE| = |EB| = |GC| = |DG|$

Taralı alan, tüm alanın $\dfrac{1}{5}$ idir.

Taralı alan $= \dfrac{A(ABCD)}{5}$ olur.

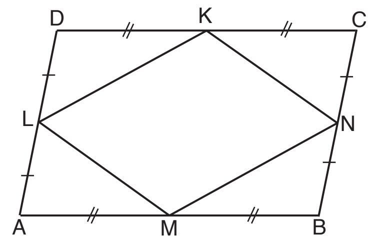
Bilgi

1) ABCD paralelkenarında, ardışık açıortayların kesişimi ile oluşan MNKL dörtgeni dikdörtgendir.



2) ABCD paralelkenarında, kenarların orta noktalarının birleştirilmesiyle elde edilen MNKL dörtgeni paralelkenardır.

$A(KLMN) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olur.



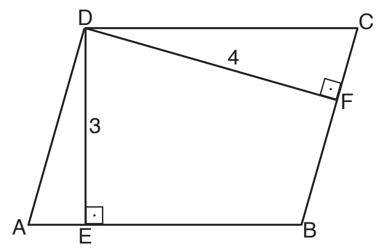
ÖRNEK

ABCD paralelkenar.

$[DE] \perp [AB]$, $[DF] \perp [BC]$,

$Ç(ABCD) = 28$ br, $|DE| = 3$ br, $|DF| = 4$ br ise

$A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

$|AB| = a$, $|BC| = b$ ise $2(a + b) = 28 \Rightarrow a + b = 14$

$3 \cdot a = 4 \cdot b \Rightarrow a = 4k$, $b = 3k$ dersek $4k + 3k = 14 \Rightarrow k = 2$ olur.

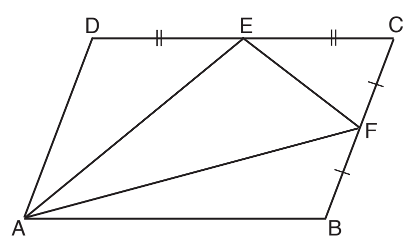
$|AB| = a = 4k = 8$ dir.

$A(ABCD) = 3 \cdot 8 = 24$ br^2 dir.

ÖRNEK

ABCD paralelkenarında, E ve F bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

$\dfrac{A(\widehat{ABF})}{A(\widehat{AFE})}$ oranını bulalım.



ÇÖZÜM

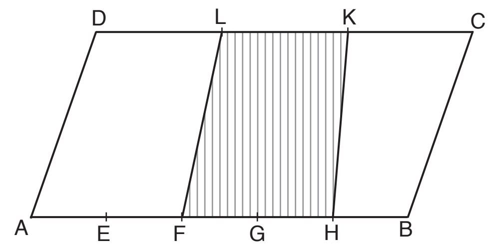
$$\frac{A(\widehat{ABF})}{A(\widehat{AFE})} = \frac{\frac{1}{4}\cancel{S}}{\frac{3}{8}\cancel{S}} = \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{8}^{2}}{3} = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

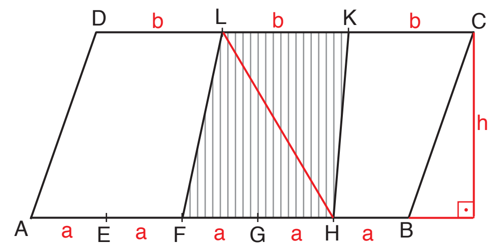
ABCD paralelkenar,

[AB], 5; [DC], 3 eşit parçaya bölünmüştür.

$\dfrac{A(FHKL)}{A(ABCD)}$ oranını bulalım.



ÇÖZÜM



$5a = 3b \Rightarrow b = \dfrac{5}{3} \cdot a$ olur.

$A(FHKL) = A(\widehat{HKL}) + A(\widehat{LFH})$

$$= \frac{b \cdot h}{2} + \frac{2 \cdot a \cdot h}{2} = \frac{\frac{5}{3} \cdot a \cdot h}{2} + \frac{2 \cdot a \cdot h}{\underset{(3)}{2}}$$

$$= \frac{5ah + 6ah}{6} = \frac{11ah}{6} \text{ olur.}$$

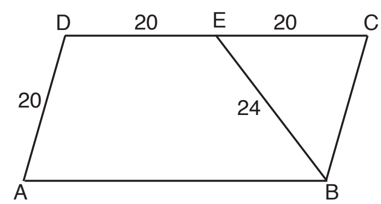
$$\frac{A(FHKL)}{A(ABCD)} = \frac{\frac{11\cancel{a} \cdot \cancel{h}}{6}}{5\cancel{a} \cdot \cancel{h}} = \frac{11}{30} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

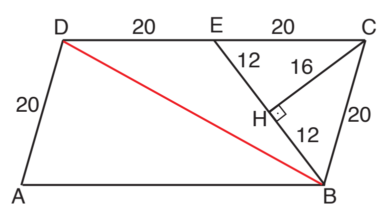
ABCD paralelkenar, $E \in [DC]$,

$|AD| = |DE| = |EC| = 20$ br,

$|EB| = 24$ br olduğuna göre A(ABCD) nın kaç br^2 olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM



$\widehat{CEB}$ ikizkenar üçgen, $[CH] \perp [EB]$ dır.

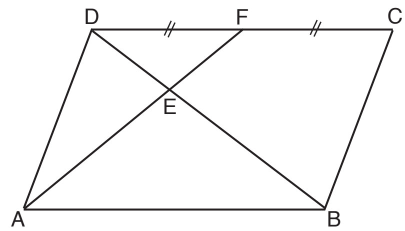
$|CH|$ Pisagor bağıntısından 16 br bulunur.

$A(\widehat{CEB}) = \dfrac{24 \cdot 16}{2} = 192\ br^2$,

$A(\widehat{DBC}) = 2 \cdot 192 = 384\ br^2$,

$A(ABCD) = 2 \cdot 384 = 768\ br^2$ olur.

ÖRNEK

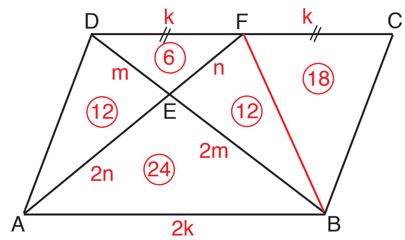


ABCD paralelkenar, $F \in [DC]$, $[DB] \cap [AF] = \{E\}$,

$|DF| = |FC|$, $A(\widehat{DEF}) = 6\ br^2$ ise

$A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$|DF| = |FC| = k$ ise $|AB| = 2k$ olur.

$\widehat{EDF} \sim \widehat{EBA}$ olduğundan

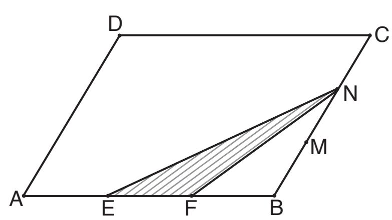
$|DE| = m$ ise $|EB| = 2m$ ve $|EF| = n$ ise $|AE| = 2n$ olur.

$A(\widehat{DEF}) = 6\ br^2$ ise $A(\widehat{DAE}) = 12\ br^2$ olur. $A(\widehat{DAE}) = 12\ br^2$ ise $A(\widehat{EAB}) = 24\ br^2$ olur.

F ile B noktaları birleştirilir. $A(\widehat{DEF}) = 6\ br^2$ ise $A(\widehat{FEB}) = 12\ br^2$ olur.

$A(\widehat{DFB}) = 18\ br^2$ ise $A(\widehat{FBC}) = 18\ br^2$ olur. $A(ABCD) = 6 + 12 + 24 + 12 + 18 = 72\ br^2$ bulunur.

ÖRNEK

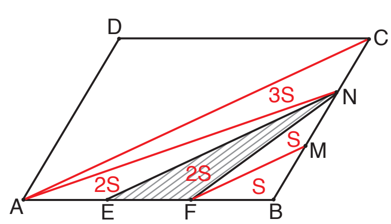


ABCD paralelkenar, $M, N \in [BC]$ ve $E, F \in [AB]$,

$[AB]$ ve $[BC]$, 3 eşit parçaya bölünmüştür.

$\dfrac{A(\widehat{NEF})}{A(ABCD)}$ oranını bulalım.

ÇÖZÜM



F ile M birleştirildiğinde,

$|BM| = |MN|$ olup $A(\widehat{FMB}) = A(\widehat{FNM}) = S$ dir.

$|EF| = |BF|$ ve $A(\widehat{NFB}) = 2S$ ise $A(\widehat{NEF}) = 2S$ dir.

N ile A birleştirilirse $|AE| = |EF|$ olup $A(\widehat{NAE}) = A(\widehat{NEF}) = 2S$ olur.

A ile C birleştirilirse $|BM| = |MN| = |NC|$ olup $A(\widehat{ABN}) = 6S$ ise $A(\widehat{ACN}) = 3S$ olur.

$A(\widehat{ACB}) = 9S$ ve $A(ABCD) = 18S$ bulunur.

$$\frac{A(\widehat{NEF})}{A(ABCD)} = \frac{2S}{18S} = \frac{1}{9} \text{ olur.}$$

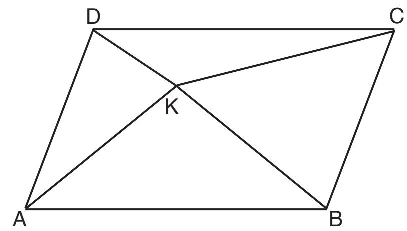
ÖRNEK

K, paralelkenar içinde alınan bir nokta,

$A(\widehat{KDA}) = 24\text{ br}^2$, $A(\widehat{KDC}) = 42\text{ br}^2$,

$A(\widehat{KCB}) = 36\text{ br}^2$ ise $A(ABCD)$ nın kaç br^2

olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

$A(\widehat{KAB}) + A(\widehat{KDC}) = A(\widehat{KDA}) + A(\widehat{KCB})$

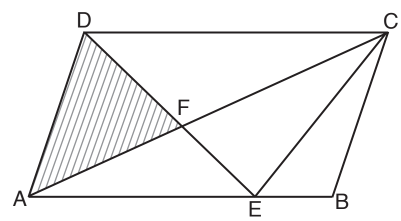
$A(\widehat{KAB}) + 42 = 24 + 36 \Rightarrow A(\widehat{KAB}) = 18\text{ br}^2$ olur.

$A(ABCD) = 18 + 42 + 24 + 36 = 120\text{ br}^2$ bulunur.

ÖRNEK

ABCD paralelkenarında, $E \in [AB], [AC] \cap [DE] = \{F\}$,

$|AE| = 3 \cdot |BE|$ ise $\dfrac{A(\widehat{ADF})}{A(ABCD)}$ oranını bulalım.



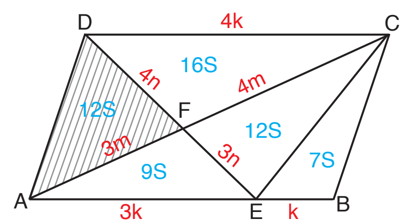
ÇÖZÜM

$|BE| = k$ ve $|AE| = 3k$ dir.

$\widehat{FDC} \sim \widehat{FEC}$,

$\dfrac{|AE|}{|DC|} = \dfrac{3}{4}$ ve

$|AF| = 3m$, $|FC| = 4m$, $|FD| = 4n$, $|FE| = 3n$ olur.



$A(\widehat{DAF}) = 12S$ ise $A(\widehat{FAE}) = 9S$,

$A(\widehat{DAF}) = 12S$ ise $A(\widehat{DFC}) = 16S$,

$A(\widehat{DFC}) = 16S$ ise $A(\widehat{CFE}) = 12S$,

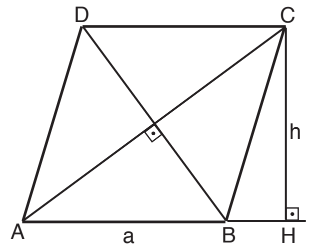
$A(\widehat{CAE}) = 21S$ ise $A(\widehat{CEB}) = 7S$ olur.

Bu durumda $A(\widehat{ADF}) = 12S$, $A(ABCD) = 9S + 12S + 16S + 12S + 7S = 56S$ olur.

$\dfrac{A(\widehat{ADF})}{A(ABCD)} = \dfrac{12\cancel{S}}{56\cancel{S}} = \dfrac{3}{14}$ bulunur.

Eşkenar Dörtgen

Bilgi



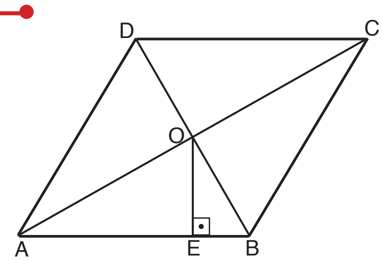
$|AB| = a$ ve $|CH| = h$

1) $A(ABCD) = a \cdot h$

2) $|DB| = e$, $|AC| = f$ olmak üzere

$A(ABCD) = \dfrac{e \cdot f}{2}$ olur.

ÖRNEK

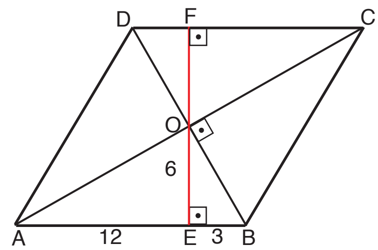


ABCD eşkenar dörtgen,

$[OE] \perp [AB]$, $|AE| = 12$ br,

$|EB| = 3$ br ise $A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



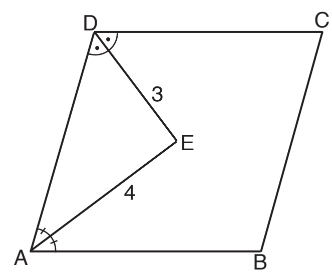
ABCD eşkenar dörtgeninde köşegenler dik kesiştiğinden, $\overset{\frown}{OAB}$ nde Öklid bağıntısı uygulanırsa;

$|OE|^2 = 12 \cdot 3 = 36 \Rightarrow |OE| = 6$ br bulunur.

$h = 2 \cdot 6 = 12$ br olur.

$A(ABCD) = (12 + 3) \cdot 12 = 15 \cdot 12 = 180$ br^2 bulunur.

ÖRNEK



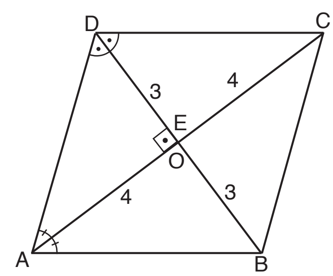
ABCD eşkenar dörtgen,

$[DE]$ ADC açısının ve $[AE]$ ise DAB açısının açıortayı,

$|DE| = 3$ br, $|AE| = 4$ br ise

$A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



Eşkenar dörtgende köşegenler açıortayıdır ve birbirini dik olarak keser.

$A(\overset{\frown}{OAD}) = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$ br^2 olur.

$A(ABCD) = 4 \cdot 6 = 24$ br^2 bulunur.

ÖRNEK

Bir eşkenar dörtgenin köşegen uzunlukları e br ve f br dir.

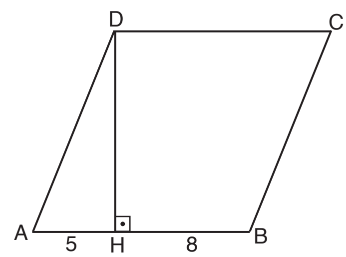
$e - f = 6$ br, $e^2 + f^2 = 96$ br^2 ise bu dörtgenin alanının kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$e - f = 6 \Rightarrow e^2 - 2ef + f^2 = 36 \Rightarrow 96 - 36 = 2ef \Rightarrow 60 = 2ef \Rightarrow ef = 30$ olur.

$\text{Alan} = \dfrac{e \cdot f}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$ br^2 bulunur.

ÖRNEK

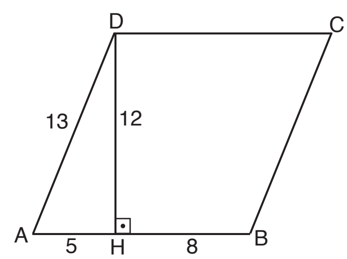


ABCD eşkenar dörtgen,

$[DH] \perp [AB]$, $|AH| = 5$ br,

$|HB| = 8$ br ise $A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



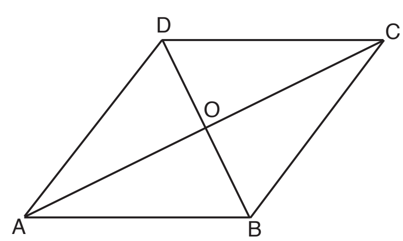
ABCD eşkenar dörtgeninde, $|AB| = |AD| = 13$ br olup

$\widehat{DAH}$ nde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|DH| = 12$ br bulunur.

$A(ABCD) = 13 \cdot 12 = 156$ br^2 olur.

ÖRNEK

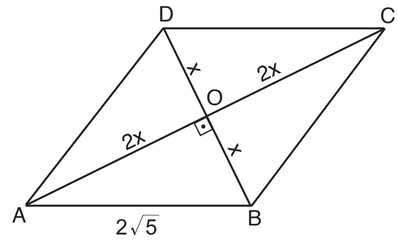


ABCD eşkenar dörtgen,

$|AC| = 2 \cdot |BD|$, $|AB| = 2\sqrt{5}$ br ise

$A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$|OD| = |OB| = x$ ve $|BD| = 2x$ ise $|AC| = 4x$ olur.

$[AC] \perp [BD]$ olup OAB üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$(2x)^2 + x^2 = (2\sqrt{5})^2$

$4x^2 + x^2 = 20$

$5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ br bulunur.

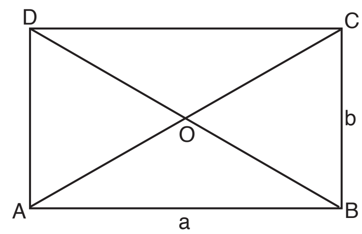
$A(ABCD) = \dfrac{4x \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2}} = 4x^2 = 4 \cdot 2^2 = 16\,br^2$ olur.

Dikdörtgen

Bilgi

$|AB| = a$, $|BC| = b$ olmak üzere

$A(ABCD) = a \cdot b$ olur.



ÖRNEK

Bir dikdörtgenin kenar uzunlukları a br ve b br olmak üzere

$a^2 - b^2 = 28$ ve

$a - b = 2$ bağıntısı var ise bu dikdörtgenin alanının kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$a^2 - b^2 = \underbrace{(a-b)}_{2}(a+b) = 28 \Rightarrow a + b = 14$ br olur.

$$\begin{array}{rl} & a + \cancel{b} = 14 \\ + & a - \cancel{b} = 2 \\ \hline & 2a = 16 \end{array}$$

$2a = 16 \Rightarrow a = 8$ br ve $b = 6$ br olur. Dikdörtgenin alanı $6 \cdot 8 = 48\,br^2$ bulunur.

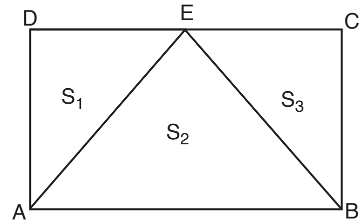
ÖRNEK

ABCD dikdörtgen, $E \in [DC]$

S_1, S_2, S_3 bulundukları bölgenin alanları ve

$S_1 + S_2 = 46\ cm^2$,

$S_2 + S_3 = 32\ cm^2$ ise $A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

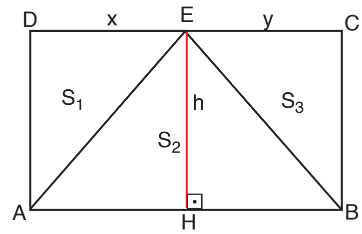
$|DE| = x$, $|EC| = y$ ve $|EH| = h$ olsun.

$$\begin{array}{rl} & S_1 + S_2 = 46 \\ + & S_2 + S_3 = 32 \\ \hline & S_1 + 2S_2 + S_3 = 78 \end{array}$$

$$\frac{x \cdot h}{2} + \frac{2 \cdot (x + y)h}{2} + \frac{y \cdot h}{2} = 78$$

$$\frac{3(x + y)h}{2} = 78 \Rightarrow \frac{(x + y)h}{2} = 26$$

$\Rightarrow A(ABCD) = 2 \cdot 26 = 52\ cm^2$ olur.



ÖRNEK

Dikdörtgen şeklindeki bir bahçenin köşegen uzunluğu 12 m ve çevresi 32 m olduğuna göre alanının kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$|AC| = 12\ m$,

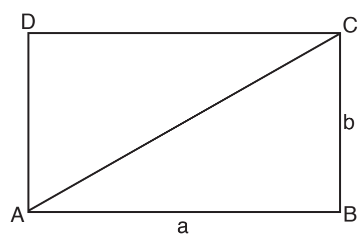
$2(a + b) = 32 \Rightarrow a + b = 16$ dır.

$(a + b)^2 = 16^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 256$

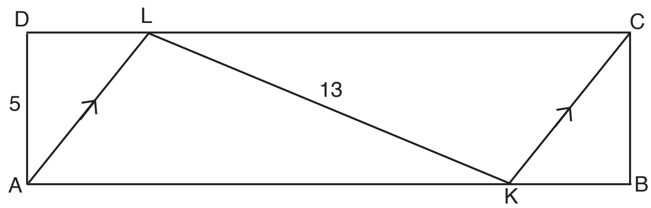
$a^2 + b^2 = 144$ yerine yazılırsa

$2ab = 256 - 144 = 112$

$A(ABCD) = ab = 56\ m^2$ bulunur.



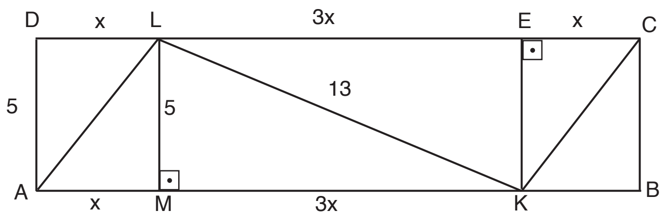
ÖRNEK



ABCD dikdörtgen, $|AD| = 5$ br, $|KL| = 13$ br, $[AL] \parallel [KC]$, $L \in [DC]$, $K \in [AB]$,

$|LC| = 4 \cdot |DL|$ ise $A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



L den $[AB]$ na, K den $[DC]$ na dik çizelim.

$|DL| = x \Rightarrow |LC| = 4x$ ve $\widehat{ADL}$ ile $\widehat{KEC}$ eş olduğu için $|EC| = x$ olur.

$\widehat{LMK}$ nde Pisagor bağıntısı uygulanırsa

$|KL| = 13$ br, $|ML| = 5$ br ve $|MK| = 12$ br olur. Buradan,

$3x = 12 \Rightarrow x = 4$ br bulunur.

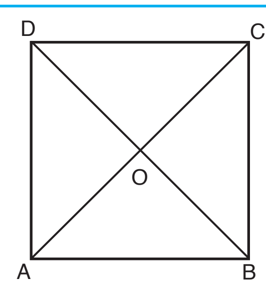
$A(ABCD) = 5 \cdot 5x = 5 \cdot 20 = 100$ br^2 olur.

Kare

Bilgi

$|AB| = a$, $|AC| = e$ olmak üzere

$A(ABCD) = a^2 = \dfrac{e^2}{2}$ olur.



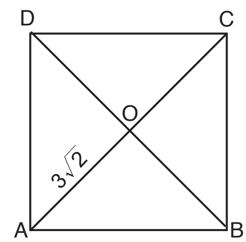
ÖRNEK

Bir kenarı uzunluğu $3\sqrt{2}$ br olan ABCD karesinin alanının kaç br² olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$A(ABCD) = a^2 = (3\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18\,br^2$ olur.

ÖRNEK



ABCD kare,

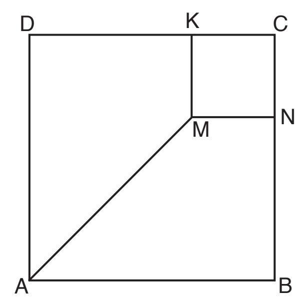
$[AC]$ ve $[BD]$ köşegen,

$|AO| = 3\sqrt{2}$ br ise $A(ABCD)$ nın kaç br² olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$|AO| = |OC| = 3\sqrt{2}$ br ise $A(ABCD) = \dfrac{|AC|^2}{2} = \dfrac{(6\sqrt{2})^2}{2} = 36\,br^2$ olur.

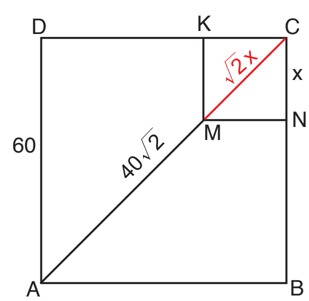
ÖRNEK



Özgür Bey ABCD karesine benzeyen tarlasının köşesindeki KCNM karesi şeklindeki parçayı parselleyip satmak istiyor.

$|MA| = 40\sqrt{2}$ m, $|AD| = 60$ m olduğuna göre Özgür Bey'in satmak istediği parselin alanının kaç m² olduğunu hesaplayalım.

ÇÖZÜM



A, M ve C noktaları doğrusaldır.

$|NC| = x$ m ise $|MC| = \sqrt{2}x$ olur. Buradan,

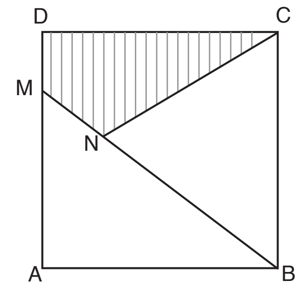
$[AC]$ köşegeni $60\sqrt{2}$ m dir.

$|AC| = 40\sqrt{2} + \sqrt{2}x = 60\sqrt{2}$

$\sqrt{2}x = 20\sqrt{2}$ ve $x = 20$ m olur.

$A(KCNM) = 20^2 = 400\,m^2$ bulunur.

ÖRNEK

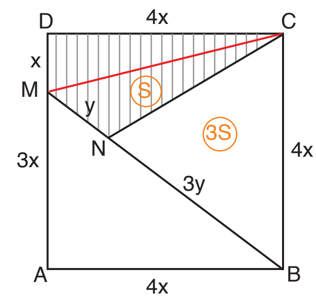


ABCD kare, $M \in [AD], N \in [BM]$,

$4|DM| = |DA|$, $3|MN| = |BN|$ ise

$\dfrac{A(NMDC)}{A(ABCD)}$ oranını bulalım.

ÇÖZÜM



M ile C birleştirilir.

$|DM| = x$ ise $|DA| = 4x$ ve $|MA| = 3x$ olur.

$|MN| = y$ ise $|BN| = 3y$ olur.

$A(\widehat{CMN}) = S$ ise $A(\widehat{CNB}) = 3S$ olur.

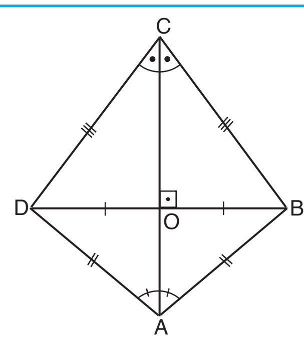
$4S = \dfrac{4x \cdot 4x}{2} \Rightarrow S = A(\widehat{CMN}) = 2x^2$ olur.

$A(\widehat{CDM}) = \dfrac{x \cdot 4x}{2} = 2x^2$ ise $A(NMDC) = 2x^2 + 2x^2 = 4x^2$ olur. Buradan,

$A(ABCD) = (4x)^2 = 16x^2$ ise $\dfrac{A(NMDC)}{A(ABCD)} = \dfrac{4x^2}{16x^2} = \dfrac{1}{4}$ bulunur.

Deltoid

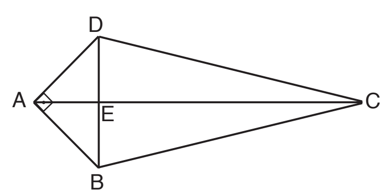
Bilgi



$|DB| = e$ ve $|AC| = f$ ise

$A(ABCD) = \dfrac{1}{2} \cdot e \cdot f$ olur.

ÖRNEK



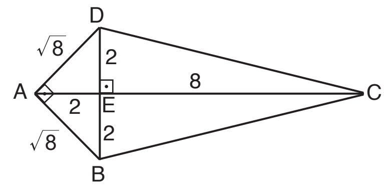
ABCD deltoid, E noktası köşegenlerin kesim noktası,

$|AB| = |AD|$, $m(\widehat{DAB}) = 90°$, $|EC| = 4 \cdot |EA|$,

$|AD| = \sqrt{8}$ br ise $A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

ABCD deltoid olduğundan $[BD] \perp [AC]$ ve $|EB| = |ED|$ olur.



ABD dik üçgeninde, $|DB|^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2 = 16$ br ve

$|DB| = 4$ br olur.

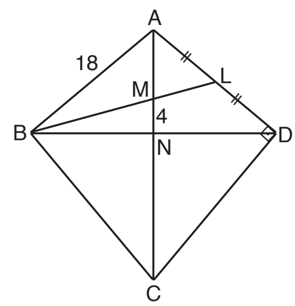
$[AE]$, kenarortay olduğundan

$|AE| = \dfrac{|DB|}{2}$ ve $|AE| = |ED| = 2$ br olur.

$|EC| = 4|EA|$ olduğundan $|EC| = 8$ br ve $|AC| = 10$ br olur.

$A(ABCD) = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 = 20$ br^2 bulunur.

ÖRNEK



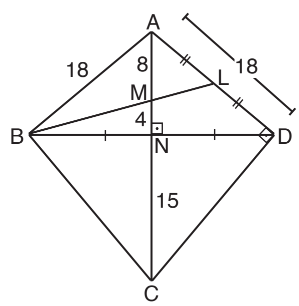
ABCD deltoid, $[AC] \cap [DB] = \{N\}$, $[AD] \perp [CD]$,

$L \in [AD]$, $M \in [BL]$, $|AB| = |AD|$, $|AL| = |LD|$,

$|MN| = 4$ br, $|AB| = 18$ br ise

$A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



ABCD deltoid olduğundan $|BN| = |ND|$ ve $[AC] \perp [BD]$ olur.

M noktası ABD üçgeninde kenarortayların kesim noktasıdır.

$|MN| = 4$ br ise $|MA| = 8$ br olur. DAC üçgeninde Öklid bağıntısı uygulanırsa $18^2 = 12 \cdot (12 + |NC|) \Rightarrow |NC| = 15$ br olduğundan

$|AC| = 12 + 15 = 27$ olur.

Yine $\widehat{DAC}$ nde Öklid bağıntısından $|ND|^2 = 12 \cdot 15 \Rightarrow |ND| = 6\sqrt{5}$ br olur.

$|BD| = 12\sqrt{5}$ ve $A(ABCD) = \dfrac{27 \cdot \overset{6}{\cancel{12}}\sqrt{5}}{\cancel{2}} = 162\sqrt{5}$ br^2 bulunur.

Etkinlik

Yaşadığınız yerde bulunan Anadolu Selçuklu veya Osmanlı mimarisini yansıtan müzeleri geziniz.

Geometrik desenlerin bulunduğu eserler hakkında müze görevlileri ile röportaj yapınız.

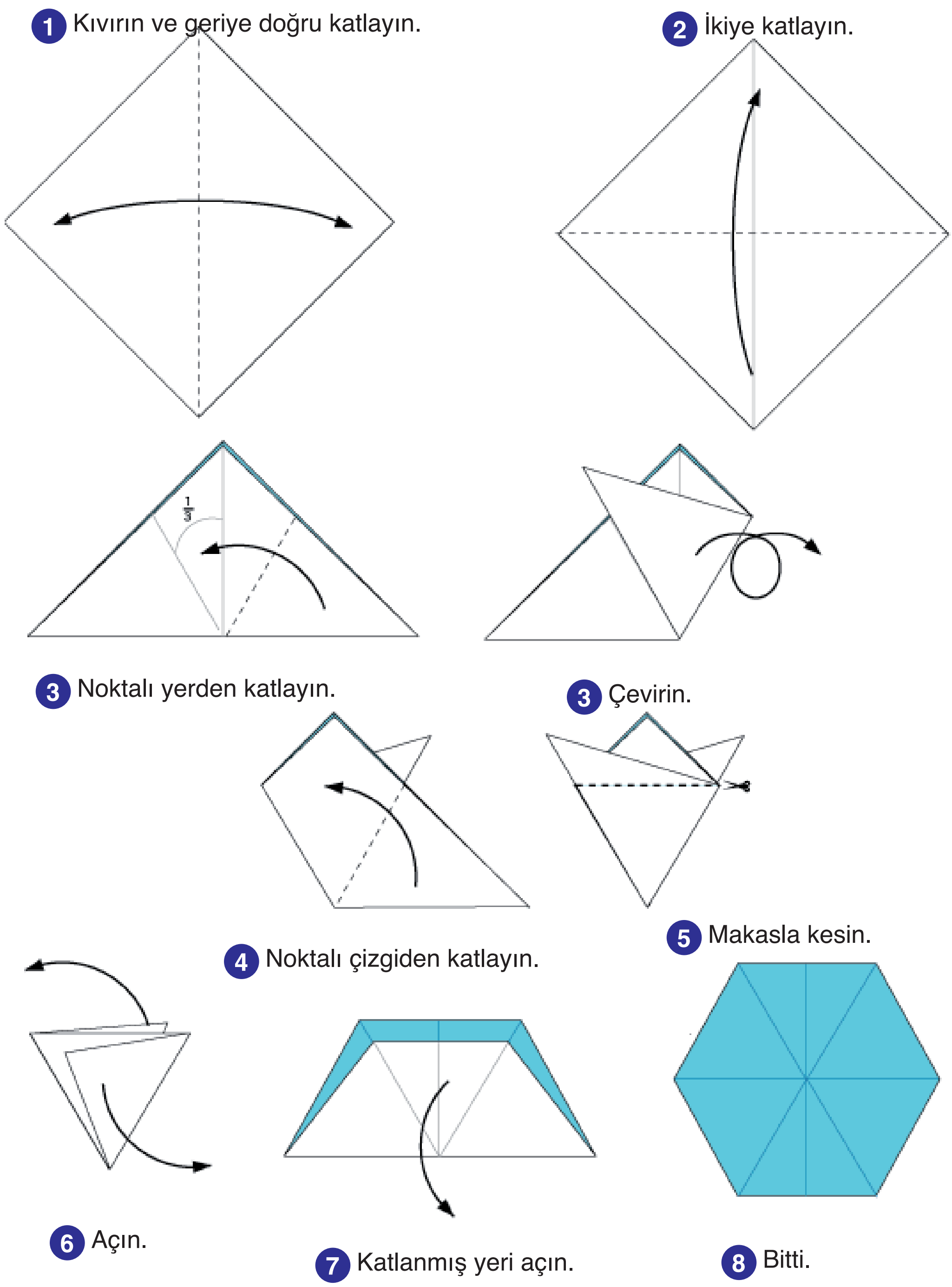
Gezi ile ilgili elde ettiğiniz çalışmalarla sınıf içinde sunum yapınız.

Etkinlik

ORİGAMİ

Çok eski zamanlardan bu yana yapılan origami, bir Japon kâğıt katlama sanatıdır. Aşağıdaki etkinliliğe benzer başka origami örneğini araştırarak siz de yapabilirsiniz.

Kare şeklindeki bir kâğıdı;



Ortaya çıkan şekil düzgün altıgendir.

TANGRAM

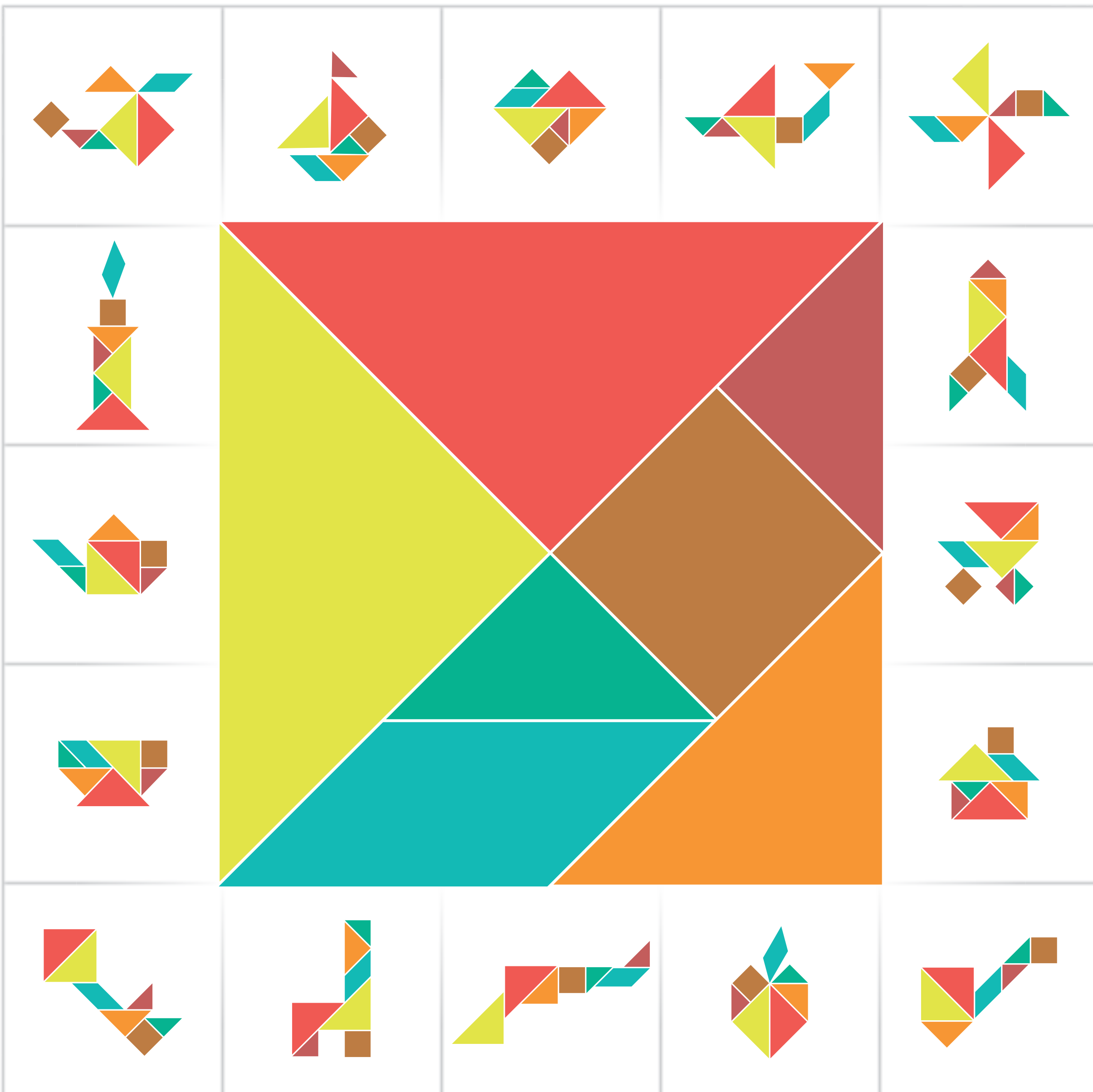
Tangram, 7 geometrik parçayı bir araya getirerek çeşitli şekiller ortaya çıkaran bir zekâ oyunudur.

Tangram farklı büyüklükte 5 üçgen, 1 paralelkenar ve 1 kareden oluşmaktadır. Burada amaç 7 geometrik şekli kullanarak değişik figürler yaratılmasıdır.

Her figür için tüm 7 geometrik şekil birbirine değecek ancak birbirinin üstüne gelmeyecek şekilde kullanılmalıdır.

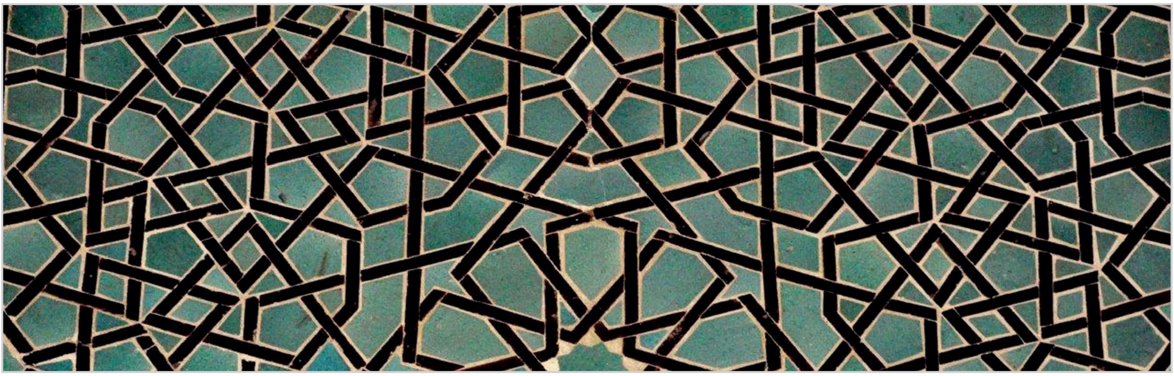
Tangram parçaları ile insan şekilleri, hayvan figürleri, binalar, ev aletleri, gemi gibi çok farklı kategoriden şekiller elde edebiliriz.

Siz de aşağıda verilen şekilleri tangram kullanarak yapmaya çalışınız.



Bilgi

Anadolu Selçukluları ülkenin pek çok yerinde cami, han, kervansaray, imaret, köprü, çeşme ve medreseler yaptırdılar. Anadolu Selçuklu mimarisinin günümüze kalan en önemli örnekleri arasında Karatay Medresesi,Hacı Kılıç Medresesi ve Beyhekim Mescidi bulunur. Cami ve medreselerin içinde, duvarlarda, kemerlerde, kubbelerde, kubbe geçişlerinde, eyvanlarda, mihraplarda görülen firuze, patlıcan moru ve lacivert renkli sırlı tuğlalarla sağlanan geometrik düzenlemeler, çini mozaik süslemeler çağının en zengin örnekleridir.



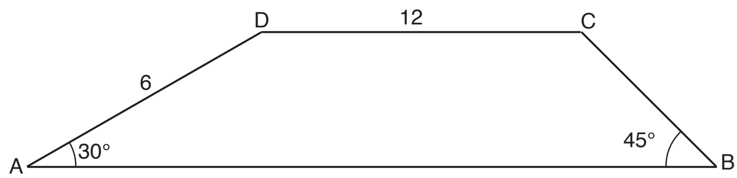
Karatay Medresesi çini örneği (Konya)

Hacı Kılıç Medresesi'nin taş süslemeleri (Kayseri)

Beyhekim Mescidi çini mihrabından örnek (Konya)

Alıştırmalar 5-5

1)

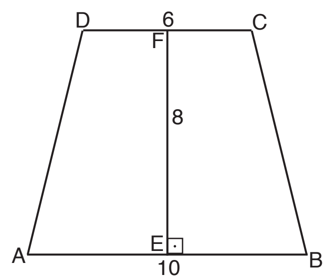


ABCD yamuk, $[DC] \parallel [AB]$, $m(\widehat{DAB}) = 30^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = 45^\circ$, $|DC| = 12$ br ise $A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.

2) ABCD yamuk, $[EF] \perp [AB]$,

$[DC] \parallel [AB]$, $|DC| = 6$ br, $|AB| = 10$ br,

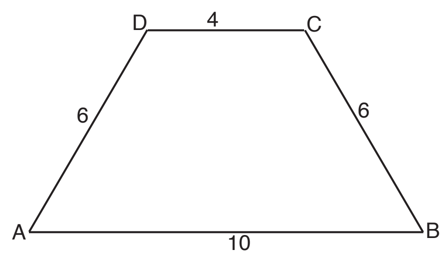
$|EF| = 8$ br ise $A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.



3) ABCD ikizkenar yamuk, $[DC] \parallel [AB]$,

$|AD| = |BC| = 6$ br, $|AB| = 10$ br, $|DC| = 4$ br ise

$A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.

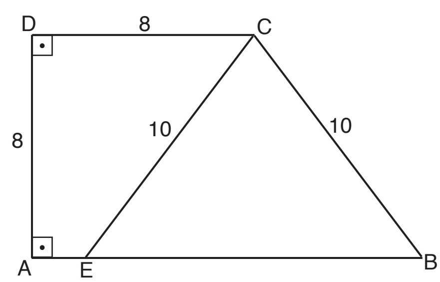


4) ABCD dik yamuk, $[DC] \perp [DA]$,

$[DC] \parallel [AB]$, $|EC| = |BC| = 10$ br, $E \in [AB]$,

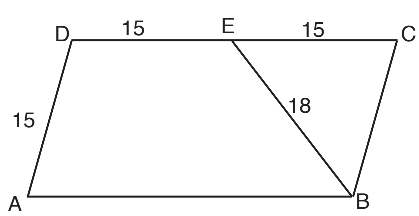
$|DC| = |AD| = 8$ br ise $A(ABCD)$ nın kaç br^2

olduğunu bulunuz.



5) ABCD paralelkenar, $|AD| = |DE| = |EC| = 15$ br,

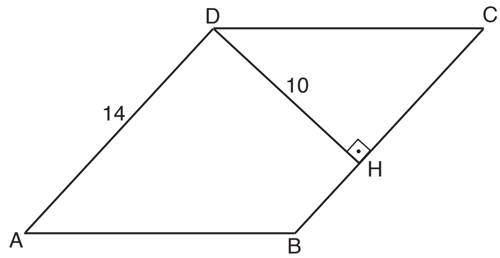
$E \in [DC]$, $|EB| = 18$ br ise $A(ABCD)$ nı bulunuz.



6) ABCD paralelkenar, $[DH] \perp [BC]$,

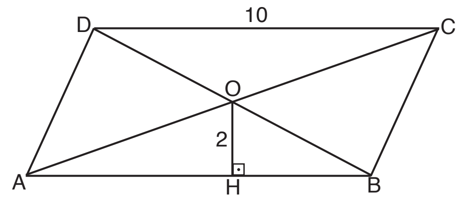
$|DH| = 10$ br, $|AD| = 14$ br ise

$A(ABCD)$ kaç br^2 olduğunu bulunuz.



7) ABCD paralelkenar, O noktası köşegenlerin kesim noktası, $[OH] \perp [AB]$, $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerdir.

$|OH| = 2$ br, $|DC| = 10$ br ise $A(ABCD)$ kaç br^2 olduğunu bulunuz

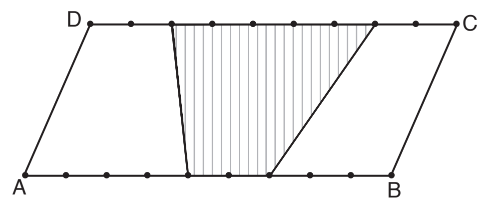


8) ABCD paralelkenar, $A(ABCD) = 54$ br^2,

$[AB]$ ve $[CD]$ 9 eş parçaya bölünüyor.

Birinin üzerinden 5, diğerinin üzerinden 2 parça alınıp birleştiriliyor.

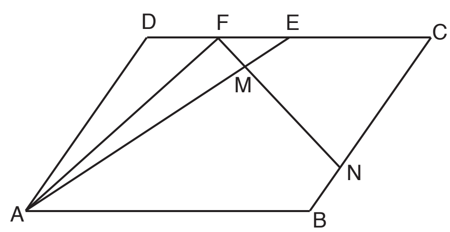
Buna göre taralı alanın kaç br^2 olduğunu bulunuz.



9) ABCD paralelkenar, $[FN] \cap [AE] = \{M\}$, $N \in [BC]$,

$F \in [DC]$, $E \in [DC]$, $|DF| = |FE|$, $|DE| = |EC|$,

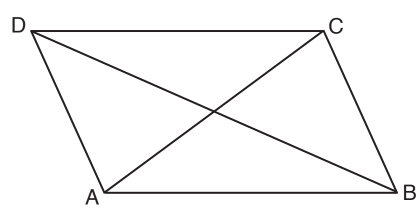
$|CN| = 3 \cdot |NB|$ ise $\dfrac{A(\widehat{AFM})}{A(ABCD)}$ oranını bulunuz



10) ABCD eşkenar dörtgen, $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerdir.

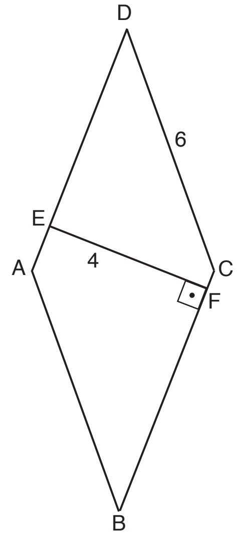
$|AC| + |BD| = 20$ br, $|AC|^2 + |BD|^2 = 248$ br ise

$A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.

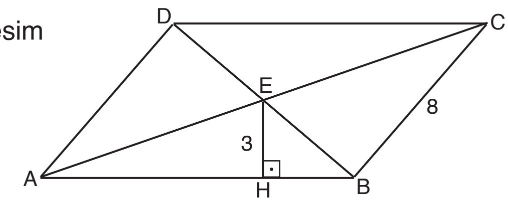


11) ABCD eşkenar dörtgen, $[EF] \perp [BC]$, $E \in [AD]$,

$|EF| = 4$ br, $|CD| = 6$ br ise $A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.



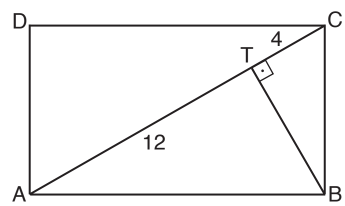
12) ABCD eşkenar dörtgen, E noktası köşegenlerin kesim noktası $[EH] \perp [AB]$, $|EH| = 3$ br, $|BC| = 8$ br ise $A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.



13) Bir kenar uzunluğu 13 m ve bir köşegen uzunluğu 10 m olan eşkenar dörtgen şeklindeki bir bahçenin alanının kaç br^2 olduğunu bulunuz.

14) ABCD dikdörtgen, $[BT] \perp [AC]$,

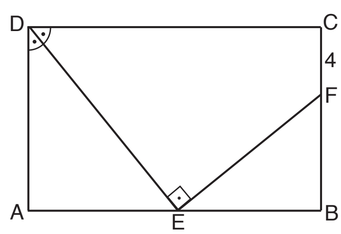
$|AT| = 12$ br, $|TC| = 4$ br ise $A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.



15) ABCD dikdörtgen, $[DE]$ ADC açısının açıortayı, $[DE] \perp [EF]$,

$|CF| = 4$ br, $Ç(ABCD) = 28$ br ise

$A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.



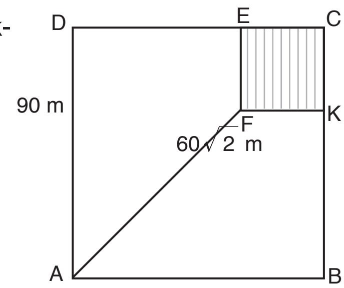
16) Bir dikdörtgenin köşegen uzunluğu 10 br ve çevresi 52 br ise alanının kaç br^2 olduğunu bulunuz.

17) Bir kenar uzunluğu ile bir köşegen uzunluğunun toplamı $6 + 6\sqrt{2}$ br olan karenin alanının kaç br^2 olduğunu bulunuz.

18) ABCD kare şeklinde bir bahçe ve FKCE bu bahçenin kare şeklinde bir bölümüdür.

$|AF| = 60\sqrt{2}$ m, $|AD| = 90$ m ise

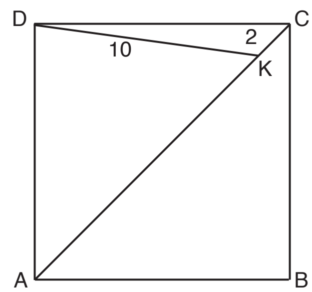
A(FKCE) nın kaç m^2 olduğunu bulunuz.



19) ABCD kare, [AC] köşegendir. $K \in [AC]$,

$|KC| = 2$ br, $|KD| = 10$ br ise

A(ABCD) nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.

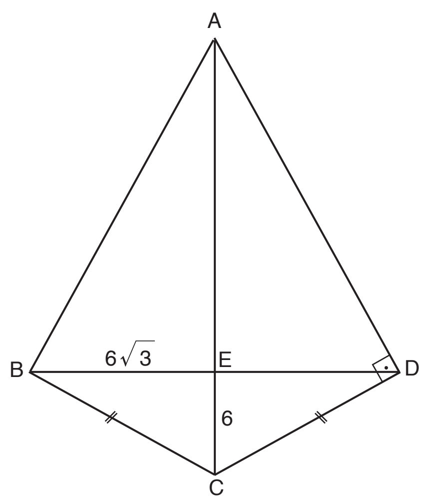


20) ABCD deltoid, [AC] ve [BD] köşegendir.

$[AD] \perp [DC]$, $|BC| = |DC|$,

$|BE| = 6\sqrt{3}$ br, $|EC| = 6$ br ise

A(ABCD) nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.



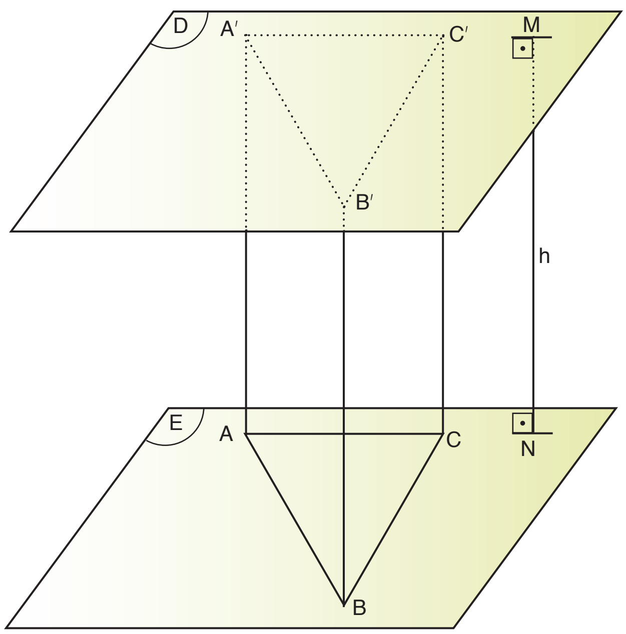
6. UZAY GEOMETRİ

6.1. Katı Cisimler

Şekildeki gibi tamamı su dolu bir kabın içine bir taş atılmaktadır. Taşan su miktarı hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Prizmalar

Bilgi



Birbirine paralel D ve E düzlemleri verilsin. Biri D, diğeri E düzlemi içinde birbirine eş iki çokgensel bölgenin tüm noktaları karşılıklı birleştirilirse elde edilen cisme **prizma** denir.

$|MN| = h$ (yükseklik),

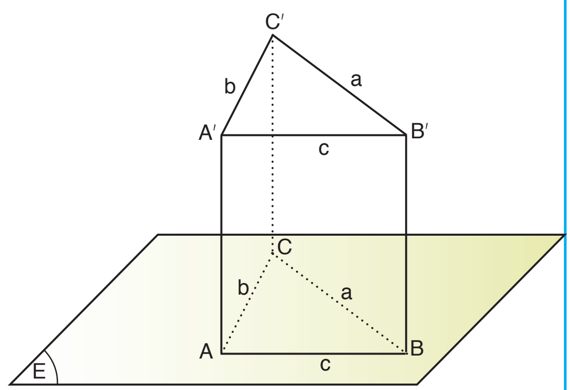
$[AC]$, $[AB]$, $[BC]$, $[B'C']$, $[A'C']$ ve $[A'B']$ taban ayrıtları,

$[AA']$, $[BB']$ ve $[CC']$ yanal ayrıtlardır.

Dik Prizma

Bilgi

Yan yüzeylerinin tümü dikdörtgen olan prizmalara **dik prizma** denir.



Prizmalar dik ve eğik oluşlarına göre isimlendirildiği gibi tabanlarına göre de isimlendirilir. Örneğin tabanı üçgen olanlar üçgen dik prizma olarak adlandırılır.

$|AA'| = |BB'| = |CC'| = h$ Yanal ayrıt (Yükseklik)

$|AB| + |BC| + |AC| =$ Taban çevresi

$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{A'B'C'}) = S_T$ (Taban alanı)

Yanal Alan $S_Y =$ Taban çevresi · Yükseklik $= (a + b + c)h$

Tüm Alan $= S = 2S_T + S_Y$

Hacim $= V =$ Taban alanı · Yükseklik $= S_T \cdot h$

ÖRNEK

Taban ayrıt uzunlukları 6, 8, 10 br olan üçgen dik prizmanın yüksekliği 13 br ise yanal alanının, tüm alanının kaç br^2 ve hacminin kaç br^3 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Taban çevresi $= 6 + 8 + 10 = 24$ br ve yükseklik 13 br ise

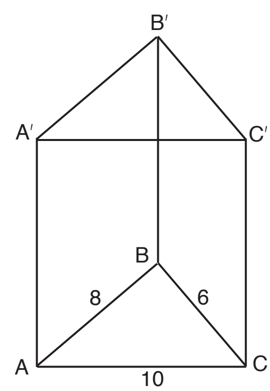
$S_Y = 24 \cdot 13 = 312$ br^2 olur.

Tüm alan $= S = 2S_T + S_Y$ olduğundan

$S_T = 2 \cdot \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 48$ br^2 olur.

$S = 48 + 312 = 360$ br^2 olur.

$V = 24 \cdot 13 = 312$ br^3 bulunur.



ÖRNEK

Tabanı eşkenar üçgen olan dik prizmanın hacmi $96\sqrt{3}$ br^3, yüksekliği 4 br olduğuna göre eşkenar üçgen dik prizmanın yanal alanını kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

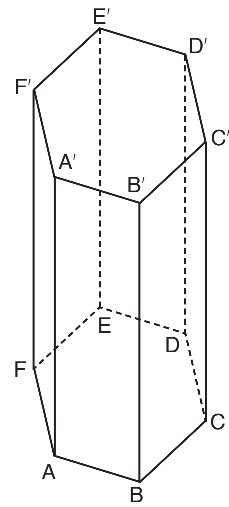
$V = S_T \cdot h \Rightarrow 96\sqrt{3} = S_T \cdot 4 \Rightarrow S_T = 24\sqrt{3}$ br^2 dir.

$S_T = 24\cancel{\sqrt{3}} = \dfrac{a^2 \cdot \cancel{\sqrt{3}}}{4} \Rightarrow a^2 = 4 \cdot 24 \Rightarrow a = 4\sqrt{6}$ br olur.

$S_Y = (\text{Taban çevresi}) \cdot h = 3 \cdot 4\sqrt{6} \cdot 4 = 48\sqrt{6}$ br^2 bulunur.

ÖRNEK

Taban çevresi 50 br ve yüksekliği 10 br olan altıgen dik prizmanın yanal alanının kaç br^2 olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

Yanal alan $= 50 \cdot 10 = 500$ br^2 bulunur.

Küp

Bilgi

Tüm yüzleri eş karelerden oluşan prizmaya **küp** denir.

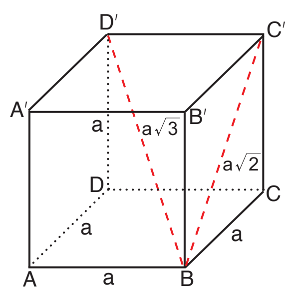
Bir ayrıtının uzunluğu a ise,

Alan $= S = 6a^2$,

Hacim $= V = a^3$,

Yüzey köşegeni $[BC']$, $|BC'| = a\sqrt{2}$,

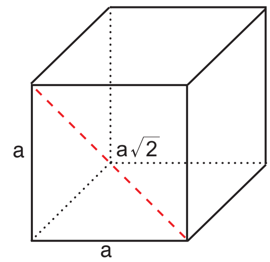
Cisim köşegeni $[BD']$, $|BD'| = a\sqrt{3}$ ile hesaplanır.



ÖRNEK

Bir yüzünün köşegen uzunluğu $8\sqrt{2}$ br olan küpün hacminin kaç br^3 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



Küpün bir ayrıtının uzunluğu a br olsun.

$\sqrt{2}a = 8\sqrt{2} \Rightarrow a = 8$

$V = a^3 = 8^3 = 512\,br^3$ bulunur.

ÖRNEK

Alanı, hacminin sayıca 2 katına eşit olan küpün bir yüzünün köşegen uzunluğunun kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Küpün bir ayrıtının uzunluğu a br olsun.

$6a^2 = 2a^3 \Rightarrow 6 = 2a$

$a = 3$ olup köşegen uzunluğu $a\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ br bulunur.

ÖRNEK

Alanı $150\,br^2$ olan küpün bir yüzünün köşegen uzunluğunun kaç birim ve hacminin kaç br^3 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

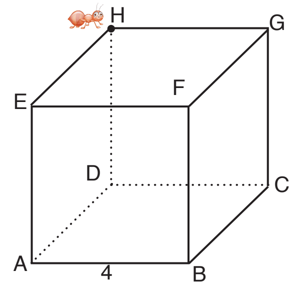
$6a^2 = 150 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5\,br$ olur.

Bir yüzünün köşegen uzunluğu $a\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ br,

Hacim $= V = 5^3 = 125\,br^3$ bulunur.

ÖRNEK

Küp şeklindeki taşın H köşesinde bulunan azimli bir karınca taşın dışından B köşesine geliyor. Taşın bir ayrıtının uzunluğu 4 cm ise karıncanın aldığı yolun en az kaç cm olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

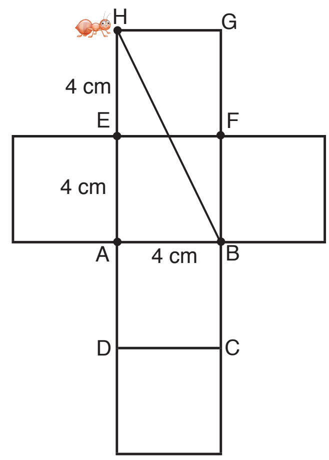
Küpün yüzeylerini açık olarak düşünürsek

$|HB|^2 = |HA|^2 + |AB|^2$ olur.

$|HB|^2 = 8^2 + 4^2$

$|HB|^2 = 80$

$|HB| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ cm bulunur.



Dikdörtgenler Prizması

Bilgi

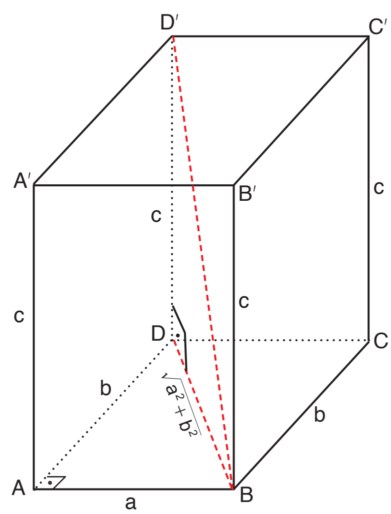
Tüm yüzleri dikdörtgen olan prizmaya **dikdörtgenler prizması** denir.

Farklı ayrıtlarının uzunlukları a, b, c ise

Alan $= S = 2(ab + ac + bc)$,

Hacim $= V = a \cdot b \cdot c$ olur.

Cisim köşegeni $[BD']$, $|BD'| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ olur.



ÖRNEK

Ayrıtlarının uzunlukları 5 cm, 8 cm ve 10 cm olan dikdörtgenler prizmasının alanının kaç cm^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$S = 2(ab + ac + bc)$

$S = 2(5 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 8 \cdot 10)$

$S = 2(40 + 50 + 80)$

$S = 2 \cdot 170$

$S = 340\ cm^2$ olur.

ÖRNEK

Ayrıtlarının uzunlukları a br, b br ve c br olan ve ayrıt uzunlukları arasında $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ bağıntısı bulunan dikdörtgenler prizmasının hacmi $70\ br^3$ ise bu dikdörtgenler prizmasının alanının kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$$\underset{(bc)}{\frac{1}{a}} + \underset{(ac)}{\frac{1}{b}} + \underset{(ab)}{\frac{1}{c}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{1}{2}$$

$2(bc + ac + ab) = abc = 70$

$S = 70\ br^2$ bulunur.

ÖRNEK

Farklı üç yüzünün alanları $30\ br^2$, $35\ br^2$ ve $63\ br^2$ olan bir dikdörtgenler prizmasının hacminin kaç br^3 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Ayrıt uzunlukları a, b, c ise $a \cdot b = 30$

$a \cdot c = 35$

$b \cdot c = 63$ tür.

Taraf tarafa çarparsak

$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 30 \cdot 35 \cdot 63$ olur.

Her iki tarafın karekökünü alırsak

$\sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} = \sqrt{5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 7} \Rightarrow a \cdot b \cdot c = 105\sqrt{6}$

$V = 105\sqrt{6}\ br^3$ bulunur.

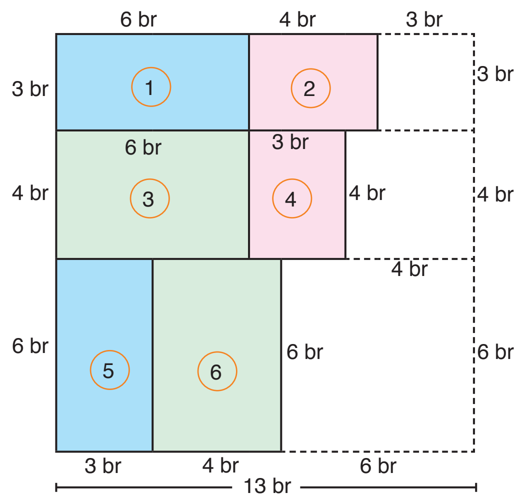
ÖRNEK

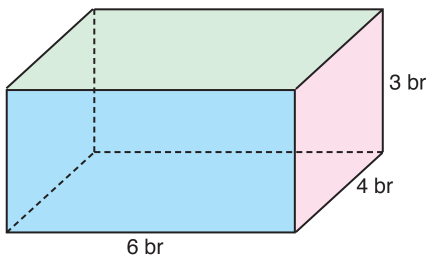
Kenar uzunlukları 3, 4, 6 ve 13 birim olan dört farklı kare vardır. En büyük karenin içerisinden diğer kareler kesilirse geriye kalan alan bir dikdörtgenler prizmasını vermektedir. Buna göre bu dikdörtgenler prizmasının hacminin kaç br^3 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Şekildeki gibi kareler kesilirse 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 numaralı dikdörtgenler elde edilir.

1-5 numaralı, 2-4 numaralı ve 3-6 numaralı dikdörtgenler eştir. Bu dikdörtgenler birleştirilerek aşağıdaki dikdörtgenler prizması elde edilir.





Bu prizmanın hacmi;

$V = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72\ br^3$ bulunur.

ÖRNEK

12 tane eş ve her bir ayrıtının uzunluğu 6 birim olan metal küpler eritilip taban ayrıtlarının uzunlukları 12 ve 9 birim olan dikdörtgenler prizması şeklindeki kalıba dökülüyor. Elde edilen dikdörtgenler prizmasının yüksekliğinin kaç birim olduğunu bulalım.

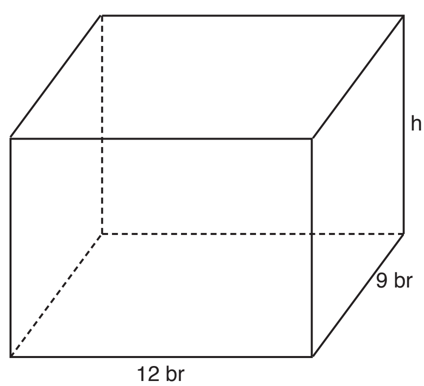
ÇÖZÜM

12 eş küpün hacmi $12 \cdot 6^3\ br^3$ tür.

$h \cdot 9 \cdot 12 = 12 \cdot 6^3$

$h \cdot 9 \cdot \cancel{12} = \cancel{12} \cdot 6^3 \Rightarrow h = 24\ br$ bulunur.

.

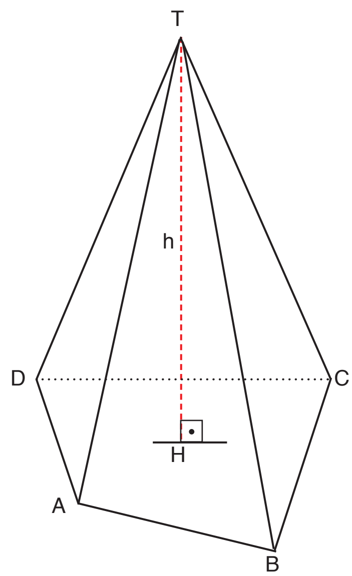


Piramitler

Bilgi

Bir düzlemde bulunan çokgen ile düzlemin dışında bir T noktası alalım. Çokgenin tüm noktalarının T noktasına birleştirilmesiyle oluşan cisme **piramit** denir.

Çokgen, piramidin tabanı; T noktası ise piramidin tepe noktasıdır. (T, ABCD) biçiminde gösterilir.



Piramitler tabandaki çokgenin şekline göre adlandırılır.

$|TH| = h$ yükseklik olup $[TA], [TB], [TC]$ ve $[TD]$ yanal ayrıtlardır.

$S = S_T + S_Y$

$S = A(ABCD) + \text{yanal alan}$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot S_T \cdot h$

Düzgün Dik Piramit

Bilgi

Yüksekliği tabanın ağırlık merkezinden geçen ve tabanı düzgün çokgen olan dik piramitlere **düzgün dik piramit** denir.

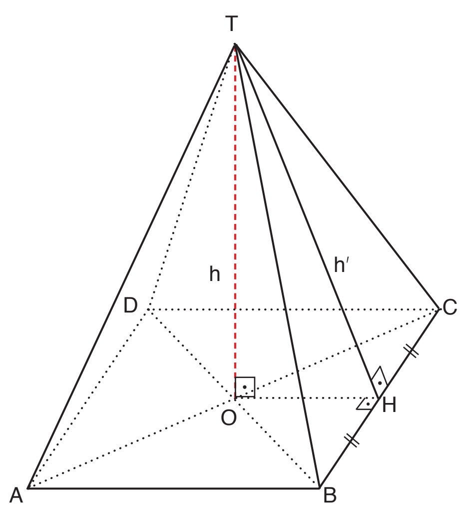
Yan yüzeyler birer ikizkenar üçgendir.

$|TO| = h$ (piramidin yüksekliği)

$|TH| = h'$ (yanal yüz yüksekliği)

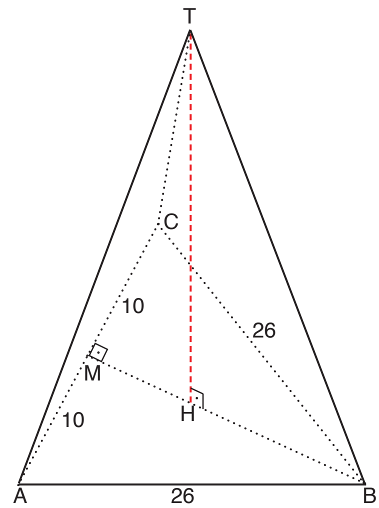
$[TA], [TB], [TC]$ ve $[TD]$ na **ana doğru** denir.

$|TA| = |TB| = |TC| = |TD|$ olur.



ÖRNEK

Şekildeki ikizkenar üçgen dik piramidin taban kenar uzunlukları 26 br, 20 br ve yüksekliği 12 br dir. Piramidin hacminin kaç br^3 olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM

ABC ikizkenar üçgeninde $|MA| = |MC| = 10$ br dir.

MAB dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|MB| = 24$ br olur.

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{20 \cdot 24}{2} = 240 \text{ br}^2$$

$$V = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot 240 \cdot \overset{4}{\cancel{12}} = 960 \text{ br}^3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Taban çevresinin uzunluğu 72 br olan düzgün altıgen dik piramidin ana doğrusunun uzunluğu 20 br ise hacminin kaç br^3 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Düzgün altıgenin çevresinin uzunluğu 72 br ise bir kenarın uzunluğu 12 br dir.

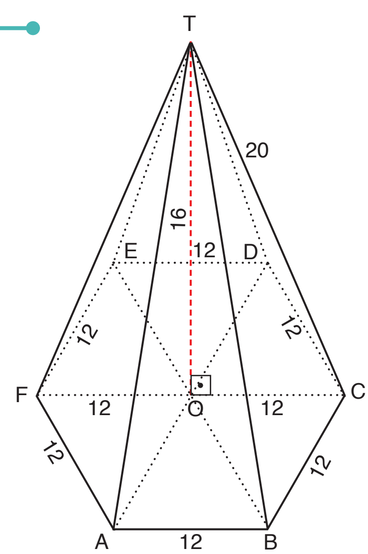
OAB ve OBC birer eşkenar üçgen olduğundan $|OC| = 12$ br dir.

TOC dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$|TO| = h = 16$ br dir.

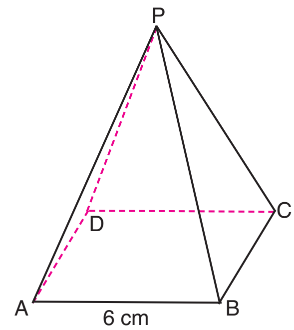
$$A(ABCDEF) = 6 \cdot A(\widehat{ABO}) = \frac{6 \cdot 12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 216\sqrt{3} \text{ br}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_T \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 216\sqrt{3} \cdot 16 \Rightarrow 1152\sqrt{3} \text{ br}^3 \text{ bulunur.}$$

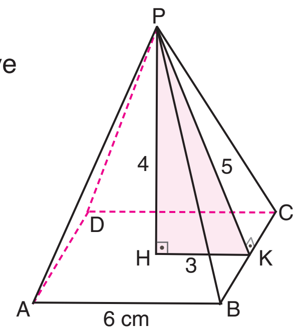


ÖRNEK

Şekildeki kare dik piramidin yüksekliği 4 cm ve taban kenar uzunluğu 6 cm ise piramidin yüzey alanını bulalım.



ÇÖZÜM



Şekildeki kare dik piramidin yüksekliği $[PH]$ dır. $|HK| = \dfrac{|AB|}{2} = \dfrac{6}{2} = 3\,\text{cm}$ ve PHK dik üçgenindeki Pisagor bağıntısından $(3-4-5$ özel üçgeni$)$ $|PK| = 5$ cm dir.

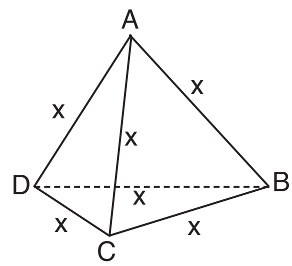
$A(\widehat{PBC}) = \dfrac{1}{2}|PK|\cdot|BC| = \dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 6 = 15\ \text{cm}^2$

Piramidin yüzey alanı $= 4\cdot A(\widehat{PBC}) + A(ABCD) = 4\cdot 15 + 6^2 = 96\ \text{cm}^2$ olur.

Bilgi

Tüm yüzleri eşkenar üçgen olan üçgen piramide **düzgün dört yüzlü** denir.

Bir ayrıtının uzunluğu x birim olan düzgün dörtyüzlünün; yan yüz yüksekliği $\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ birim, yüksekliği $\dfrac{x\sqrt{6}}{3}$ birim, yüzey alanı $x^2\sqrt{3}$ birimkare ve hacmi $\dfrac{x^3\sqrt{2}}{12}$ birimküptür.



ÖRNEK

Hacmi $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\text{br}^3$ olan düzgün dört yüzlünün alanını bulalım.

ÇÖZÜM

Düzgün dört yüzlünün bir ayrıtının uzunluğu a br olsun.

$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ise $3a^3\sqrt{2} = 12.2\sqrt{2}$

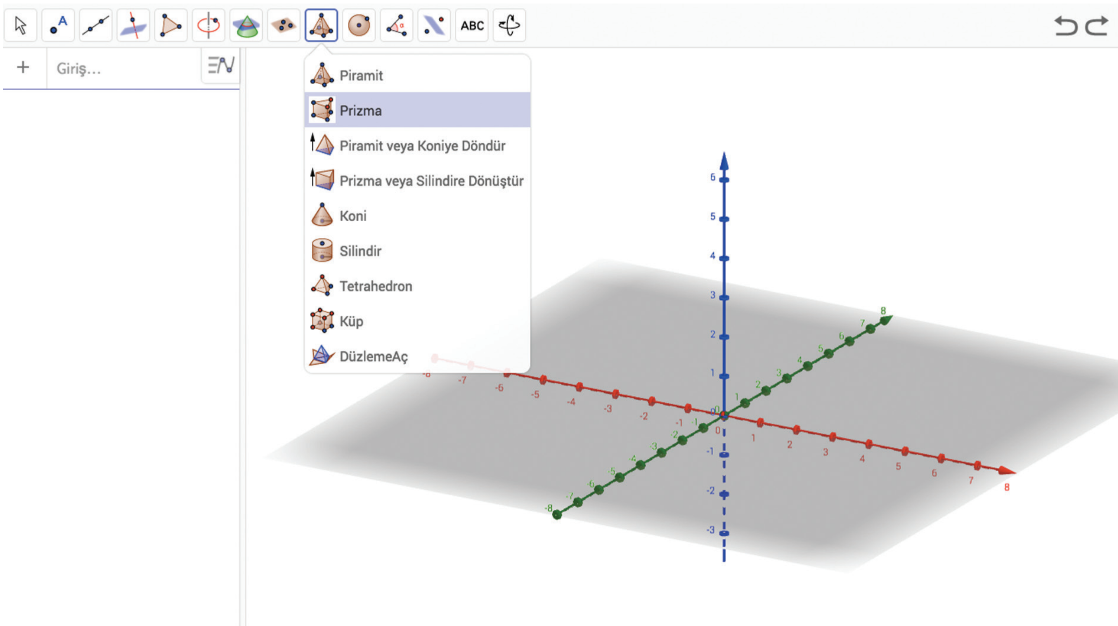
$$a^3 = \frac{12\cdot 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 8 \text{ den } a = 2 \text{ br dir.}$$

Düzgün dört yüzlünün alanı $= a^2\sqrt{3} = 2^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\,\text{br}^2$ olur.

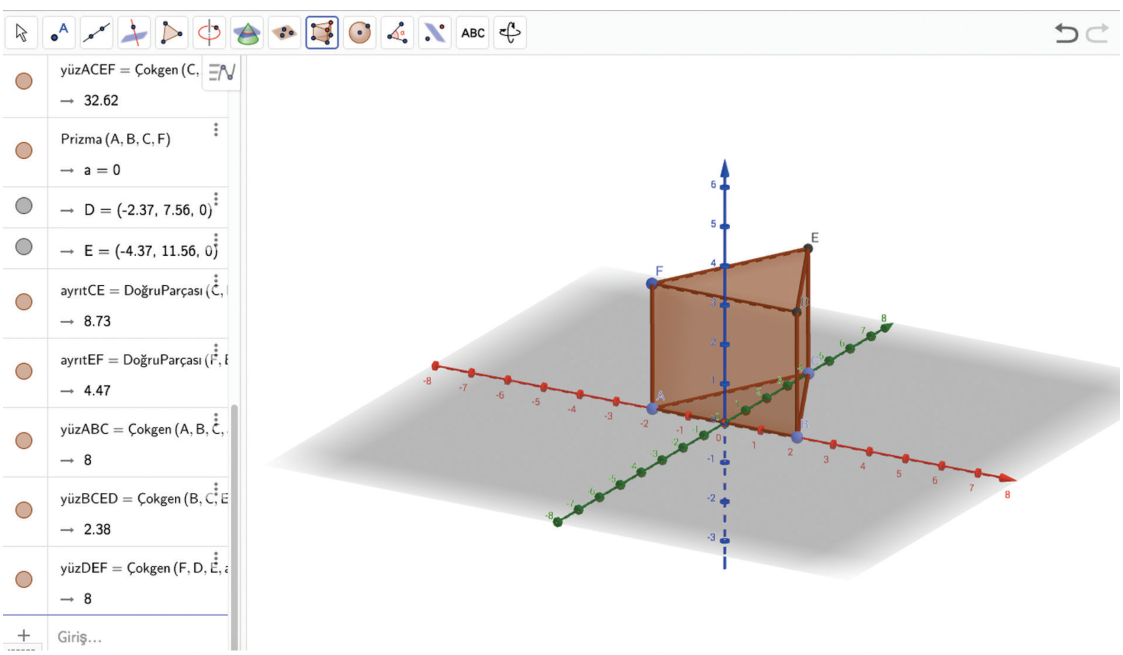
4

Bilgi İletişim Teknolojisi

1. Daha önce bilgisayarınıza indirmiş olduğunuz "GeoGebra" programı çalıştırınız
2. Katı cisimler menüsüne gelerek prizma oluşturmak için aşağıdaki menüyü seçiniz.



3. Koordinat sisteminden noktaları seçerek prizmayı oluşturunuz.



Alıştırmalar 6-1

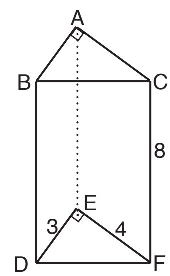
1) Yüksekliği 8 br, yanal alanı taban alanının 4 katı olan kare dik prizmanın hacmi kaç br^3 tür?

2) Tabanının bir kenar uzunluğu 2 br, yüksekliğinin uzunluğu 10 br olan eşkenar üçgen dik prizmanın hacmi kaç br^3 tür?

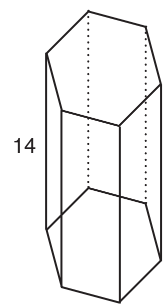
3) Tabanı eşkenar üçgen olan dik prizmanın taban ayrıtının uzunluğu 3 br ve yüksekliğinin uzunluğu 7 br dir. Bu dik prizmanın hacmi kaç br^3 tür?

4) Şekildeki tabanı dik üçgen olan dik prizmada, $[BA] \perp [AC]$

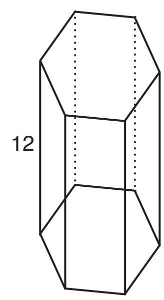
$|DE| = 3\,br$, $|EF| = 4\,br$, $|CF| = 8\,br$ ise prizmanın hacmi kaç br^3 tür?



5) Taban çevresinin uzunluğu 18 br ve yüksekliği 14 br olan düzgün altıgen dik prizmanın yanal alanının kaç br^2 olduğunu bulunuz.



6) Taban alanı 20 br^2 ve yüksekliği 12 br olan düzgün altıgen dik prizmanın hacminin kaç br^3 olduğunu bulunuz.

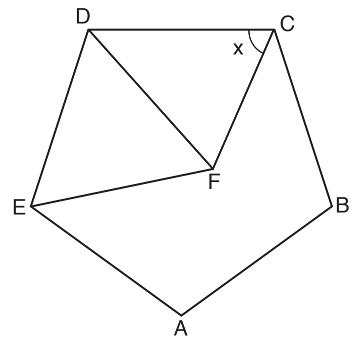


7) Ayrıt uzunlukları a br, b br ve c br olan ve ayrıt uzunlukları arasında $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{8}$ bağıntısı bulunan dikdörtgenler prizmasının alanı 40 br^2 ise hacminin kaç br^3 olduğunu bulunuz.

8) Ayrıt uzunlukları a br, b br ve c br olan dikdörtgenler prizmasında, $a + b = 8\,br$, $b + c = 13\,br$, $a + c = 11\,br$ ise prizmanın alanının kaç br^2 olduğunu bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

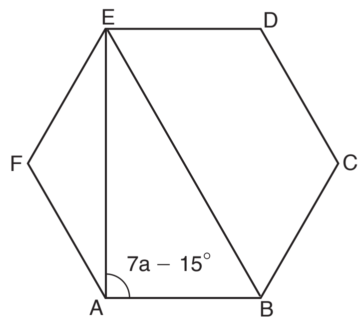
1) ABCDE düzgün beşgen, FED eşkenar üçgen ise $m(\widehat{FCD})$ kaç derecedir?



A) 64° B) 65° C) 66°

D) 67 ° E) 68°

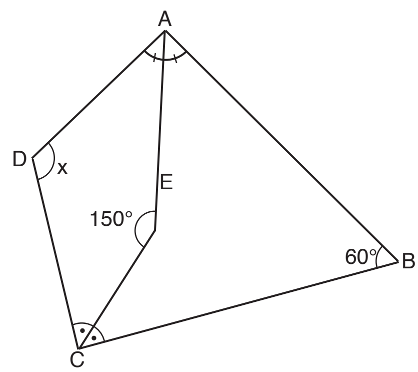
2) ABCDEF düzgün altıgen, $m(\widehat{EAB}) = 7a - 15^\circ$ ise a kaç derecedir?



A) 13° B) 14° C) 15°

D) 17° E) 20°

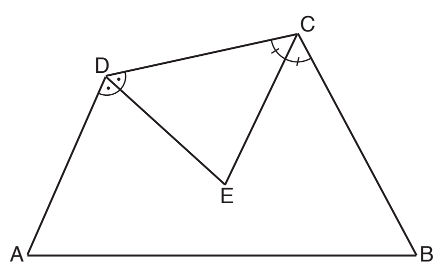
3) ABCD bir dörtgen, $[AE]$ DAB açısının ve $[CE]$ ise DCB açısının açıortayı, $m(\widehat{AEC}) = 150^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$ ise x açısı kaç derecedir?



A) 110° B) 120° C) 125°

D) 130° E) 140°

4) ABCD dörtgeninde, $[DE]$ ADC açısının ve $[CE]$ BCD açısının açıortaylardır. $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 150^\circ$ ise $m(\widehat{DEC})$ kaç derecedir?



A) 72° B) 73° C) 74°

D) 75 ° E) 76°

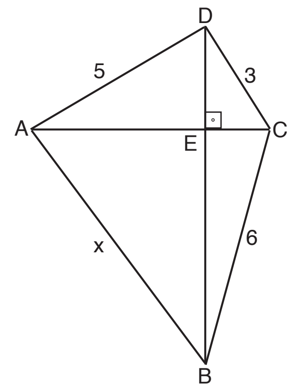
5) Şekildeki ABCD dörtgeninde, $[AC] \perp [DB]$,

$|BC| = 6$ br, $|CD| = 3$ br, $|DA| = 5$ br olduğuna göre

$|AB| = x$ uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{13}$ B) $2\sqrt{13}$ C) $3\sqrt{13}$

D) $4\sqrt{13}$ E) $5\sqrt{13}$



6) Şekildeki ABCD dörtgeninde, $E \in [CD], F \in [AB]$,

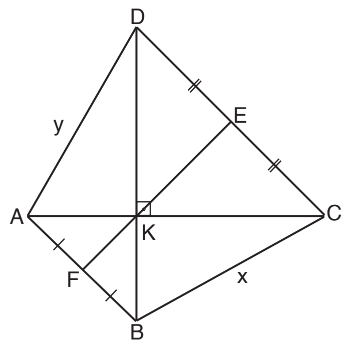
$[AC] \perp [DB]$, $|AF| = |BF|$, $|CE| = |DE|$,

$|KF| = 3$ br, $|KE| = 5$ br, $|BC| = x$ br,

$|AD| = y$ br ise $\sqrt{x^2 + y^2}$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{29}$ B) $\sqrt{34}$ C) $2\sqrt{34}$

D) $3\sqrt{34}$ E) $4\sqrt{33}$



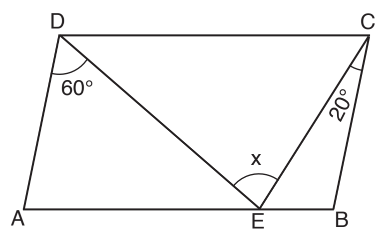
7) ABCD paralelkenar, $E \in [AB]$,

$m(\widehat{ADE}) = 60°$, $m(\widehat{ECB}) = 20°$ ise

$m(\widehat{DEC})$ kaç derecedir?

A) 60° B) 70° C) 75°

D) 80° E) 90°



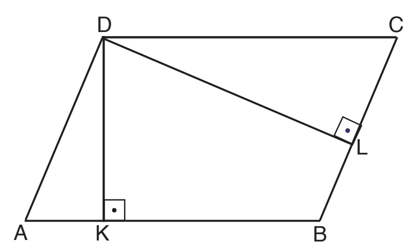
8) ABCD paralelkenar, $[DK] \perp [AB]$, $[DL] \perp [BC]$,

$|AB| = 8$ br, $|BC| = 6$ br, $|DK| = 18$ br ise

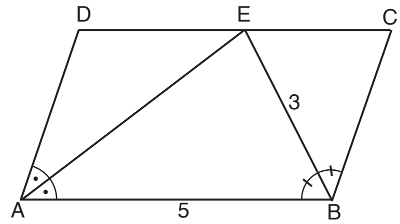
$|DL|$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 20 B) 22 C) 24

D) 26 E) 30



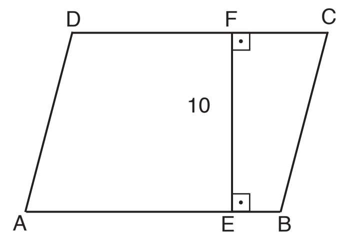
9) ABCD paralelkenar, $E \in [CD]$, $[AE]$ DAB açısının ve $[BE]$ ise ABC açısının açıortayı, $|AB| = 5$ br, $|EB| = 3$ br olduğuna göre $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?



A) 6 B) 10 C) 12

D) 16 E) 30

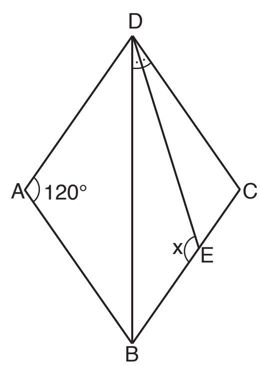
10) ABCD paralelkenar, $[FE] \perp [AB]$, $[FE] \perp [DC]$, $|AB| = 12$ br, $|EF| = 10$ br ise $A(ABCD)$ aşağıdakilerden hangisidir?



A) 96 B) 100 C) 120

D) 125 E) 140

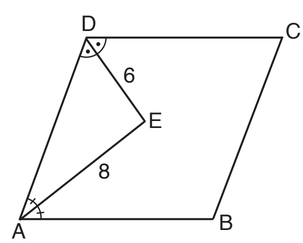
11) ABCD eşkenar dörtgen, $[DE]$ BDC açısının açıortayı, $m(\widehat{A}) = 120°$ ise $m(\widehat{DEB})$ kaç derecedir?



A) 110° B) 120° C) 125°

D) 130° E) 135°

12) ABCD eşkenar dörtgen, $[DE]$ ADC açısının ve $[AE]$ ise DAB açısının açıortayı, $|DE| = 6$ br, $|AE| = 8$ br ise $A(ABCD)$ aşağıdakilerden hangisidir?



A) 90 B) 92 C) 94

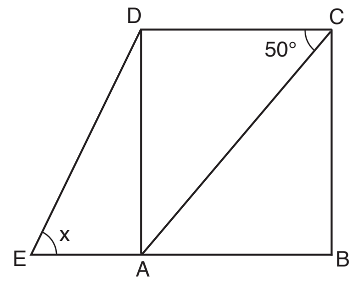
D) 96 E) 100

13) ABCD dikdörtgen, $m(\widehat{ACD}) = 50°$, E, A, B noktaları doğrusal,

$|AC| = |EB|$ ise $m(\widehat{BED})$ nün kaç derecedir?

A) 60° B) 65° C) 70°

D) 75° E) 80°



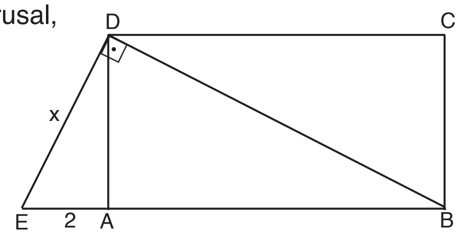
14) ABCD dikdörtgen, $[BD] \perp [DE]$, E, A, B noktaları doğrusal,

$|EA| = 2$ br, $A(ABCD) = 256$ br^2 ise

$|ED|$ kaç birimdir?

A) $\sqrt{17}$ B) $2\sqrt{17}$ C) $3\sqrt{17}$

D) $4\sqrt{17}$ E) $5\sqrt{17}$



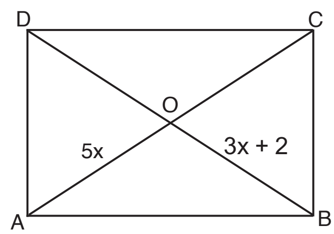
15) ABCD dikdörtgen, O noktası köşegenlerin kesim noktası,

$A(ABCD) = 150$ br^2, $|OB| = (3x + 2)$br, $|OA| = 5x$ br ise

Ç(ABCD) kaç birimdir?

A) 21 B) 35 C) 40

D) 42 E) 54



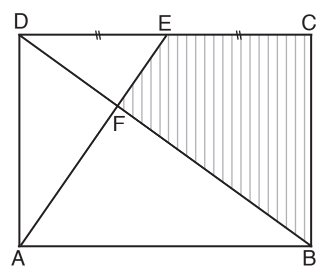
16) ABCD dikdörtgen, $E \in [CD]$, $[AE] \cap [DB] = \{F\}$,

$|ED| = |EC|$ ise

$\dfrac{A(FECB)}{A(ABCD)}$ oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{4}{15}$

D) $\frac{5}{16}$ E) $\frac{1}{3}$

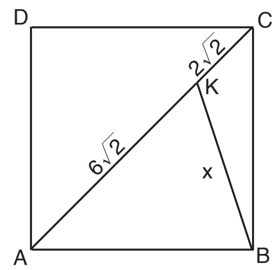


17) ABCD kare, $K \in [AC]$, $|AK| = 6\sqrt{2}$ br,

$|KC| = 2\sqrt{2}$ br ise $|KB|$ kaç birimdir?

A) $\sqrt{10}$ B) $2\sqrt{10}$ C) $3\sqrt{10}$

D) $4\sqrt{10}$ E) $5\sqrt{10}$

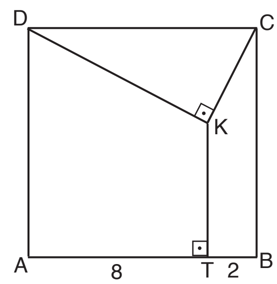


18) ABCD kare, $[KT] \perp [AB]$, $[KC] \perp [KD]$,

$|AT| = 8$ br, $|TB| = 2$ br ise $|KT|$ kaç birimdir?

A) 6 B) 7 C) 8

D) 12 E) 16

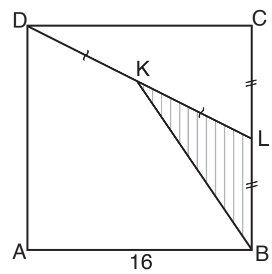


19) ABCD kare, K ve L bulunduğu kenarların orta noktalarıdır.

$|AB| = 16$ br ise $A(\widehat{KBL})$ kaç br^2 dir?

A) 4 B) 8 C) 16

D) 32 E) 64

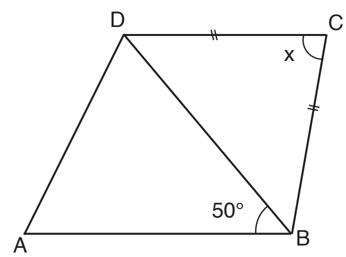


20) ABCD yamuk, $[DC] \parallel [AB]$, $m(\widehat{DBA}) = 50°$,

$|DC| = |CB|$ ise $m(\widehat{DCB})$ nün kaç derecedir?

A) 60° B) 70° C) 80°

D) 85° E) 90°



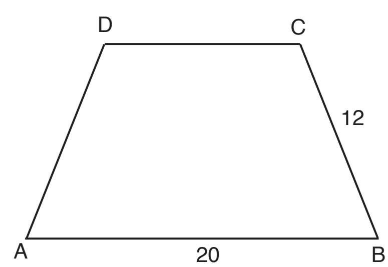
21) ABCD yamuk, $[AB] \parallel [DC]$, $m(\widehat{ADC}) = 2m(\widehat{CBA})$,

$|CB| = 12$ br, $|AB| = 20$ br ise

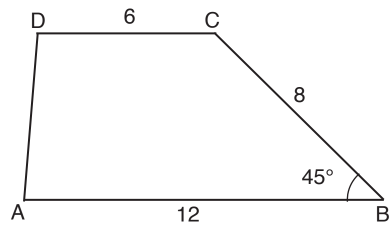
Ç(ABCD) kaç birimdir?

A) 48 B) 50 C) 52

D) 54 E) 56



22) ABCD yamuk, $[AB] \parallel [DC]$, $|DC| = 6$ br, $|AB| = 12$ br, $|BC| = 8$ br, $m(\widehat{ABC}) = 45°$ ise $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?



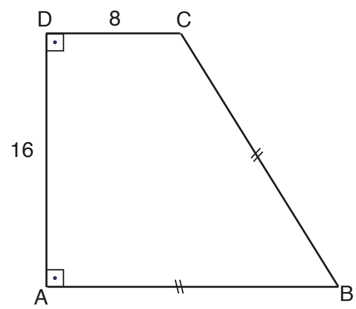
A) $30\sqrt{2}$ B) $32\sqrt{2}$ C) $34\sqrt{2}$

D) $36\sqrt{2}$ E) $38\sqrt{2}$

23) Yanda verilen dik yamuk şeklindeki bahçede, $[AB] \parallel [DC]$, $[DA] \perp [AB]$

$|DC| = 8$ br, $|AD| = 16$ br, $|AB| = |BC|$ ise

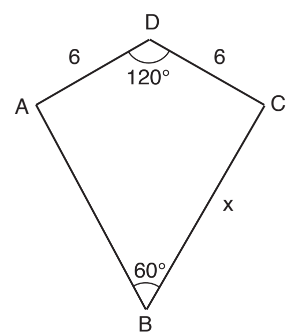
$A(ABCD)$ kaç br^2 dir?



A) 160 B) 182 C) 190

D) 198 E) 224

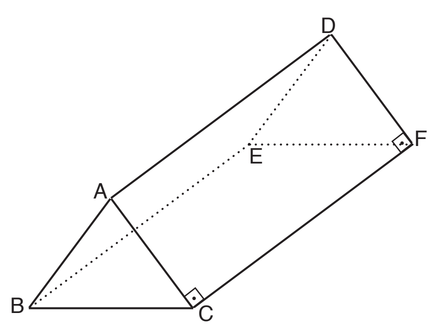
24) ABCD deltoid, $m(\widehat{ADC}) = 120°$, $m(\widehat{ABC}) = 60°$, $|AD| = |DC| = 6$ br, $|BC|$ kaç birimdir?



A) $3\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{6}$

D) 6 E) $6\sqrt{3}$

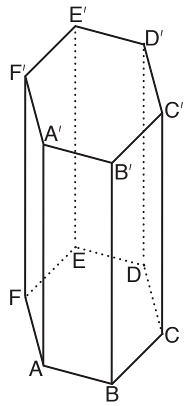
25) Şekilde ABC ikizkenar üçgenini taban kabul eden dik prizmada, $|AB| = |AC| = 5$ br, $|BC| = 6$ br ve $|CF| = 10$ br ise prizmanın hacmi kaç br^3 tür?



A) 100 B) 105 C) 110

D) 120 E) 125

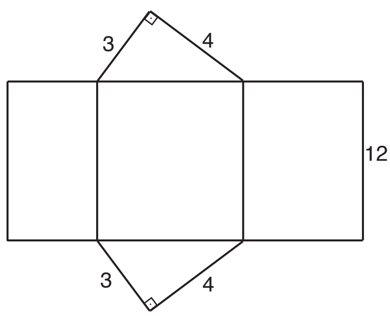
26)



Tabanı ABCDEF düzgün altıgeni olan dik prizmanın taban çevresinin uzunluğu 24 br ve yüksekliğinin uzunluğu 12 br ise prizmanın hacmi kaç br^3 tür?

A) $260\sqrt{3}$ B) $268\sqrt{3}$ C) $278\sqrt{3}$ D) $280\sqrt{3}$ E) $288\sqrt{3}$

27)



Yukarıda açınımı verilen üçgen dik prizmanın hacmi kaç br^3 tür?

A) 62 B) 68 C) 70 D) 72 E) 80

28) Hacimleri toplamı 468 br^3 olan iki küp üst üste konuyor. Toplam yükseklik 12 br oluyor. Küçük küpün hacmi kaç br^3 tür?

A) 8 B) 27 C) 64 D) 125 E) 216

29) Bir dikdörtgenler prizmasının ayrıtlarının uzunlukları a br, b br ve c br dir.

$ab + ac + bc = 56$ br, $a + b + c = 16$ br ise dikdörtgenler prizmasının cisim köşegeninin uzunluğu kaç birimdir?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

30) Farklı üç yüzünün alanları $30\,br^2$, $35\,br^2$, $42\,br^2$ olan bir dikdörtgenler prizmasının hacmi kaç br^3 tür?

A) 170 B) 210 C) 336 D) 504 E) 720

31) Bir dikdörtgenler prizmasının alanı $225\,br^2$ ve cismin köşegeninin uzunluğu $20\,br$ olduğuna göre prizmanın üç ayrıtının uzunlukları toplamı kaç birimdir?

A) 15 B) 18 C) 20 D) 22 E) 25

32) Bir dikdörtgenler prizmasının boyutları 3, 5, 7 sayıları ile orantılıdır. Dikdörtgenler prizmasının hacmi $2835\,br^3$ ise alanı kaç br^2 dir?

A) 1260 B) 1268 C) 1270 D) 1274 E) 1278

33) Bir dikdörtgenler prizmasının ayrıtların uzunlukları a br, b br ve c br dir. Ayrıtları arasında $\frac{a}{b}=\frac{2}{5}$, $\frac{b}{c}=\frac{10}{3}$ oranı vardır. Prizmanın hacmi $960\,br^3$ ise prizmanın alanı kaç br^2 dir?

A) 164 B) 274 C) 324 D) 328 E) 656

34) Tabanının bir kenar uzunluğu 12 br ve yüksekliğinin uzunluğu $8\sqrt{3}$ br olan düzgün altıgen dik pramidin yanal alanı kaç br^2 dir?

A) $360\sqrt{3}$ B) $365\sqrt{3}$ C) $370\sqrt{3}$ D) $375\sqrt{3}$ E) $380\sqrt{3}$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI CEVAP ANAHTARI

1. SAYMA VE OLASILIK

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	E	E	A	E	C	C	E	D	A	B	B	D	A	C	C	B	D	C	E

21	22	23
D	B	D

2. FONKSİYONLAR

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	C	A	A	D	E	B	B	E	C	D	E	A	E	C	D	C	E	C

21	22	23	24	25	26	27	28	29
A	D	B	A	C	C	B	E	D

3. POLİNOMLAR VE İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	D	E	D	A	C	A	B	B	E	C	A	C	D	E	D	E	B	E

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	D	C	D	B	A	C	B	E	C	E	D	A	C	C	B	D	A	E	B

41	42	43	44
E	E	A	B

4. ÇOKGENLER VE UZAY GEOMETRİ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	C	B	D	B	C	D	C	C	C	E	D	B	B	C	A	B	A	D	C

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
C	D	E	E	D	E	D	D	B	B	E	E	E	A

SÖZLÜK

A

alt küme : Bütün ögeleri belli bir kümenin ögeleri olan küme.

analitik düzlem : Üzerine koordinat sistemi yerleştirilmiş düzlem.

apsis : Analitik düzlemde bir noktanın birinci bileşeni.

apsis ekseni : Analitik düzlemde yatay eksen, x ekseni.

asal sayı : Sadece iki pozitif tam sayı böleni olan doğal sayılar.

ayrık olay : Kesişimleri boş küme olan olaylar.

B

basit olay : Bir tek çıktısı olan ve kendisinden başka olaylara ayrıştırılamayan olaylar.

birim : Bir çokluğu oluşturan varlıkların her biri, ünite.

C

cebir : Gerçek sayılarla, bunların yerini tutan harfler yardımıyla nicelikler arasında genel bağlantılar kuran matematik kolu.

Ç

çarpan : Cebirsel ifadede çarpım durumundaki her bir terim.

çıktı : 1. Bir olaydaki olası sonuçlar. 2. Bir olasılık deneyinde, karşılaşması mümkün olan olaylardan her birisi.

çokgen : Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan üç veya daha fazla noktanın birleştirilmesiyle oluşan kapalı şekil.

D

değişken : Sembolik bir ifade veya bir niceliği (miktarı) ifade etmek için kullanılan sembol.

deltoid : Tabanları ortak iki ikizkenar üçgenin birleşiminin oluşturduğu dörtgen.

deney : Araştırmacının gözlem yapmasına veya sonuçlar elde etmesine yarayan işlem.

dinamik : Aktif çalışan. Hareket halinde olan.

diskriminant : $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\triangle = b^2 - 4ac$ sayısı $(a \neq 0)$.

doğrunun eğimi : Doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının tanjantı.

doğru orantı : İki nicelikten biri artarken diğerinin artması veya biri azalırken diğerinin de azalması.

dörtgen : Dört kenarlı çokgen.

E

eksen : Analitik düzlemi oluşturan sayı doğrularından her biri.

eşkenar üçgen : Kenarlarının uzunlukları eşit olan üçgen.

eşkenar dörtgen : Kenarlarının uzunlukları eşit olan paralelkenar.

eş olasılık : Deneydeki her bir çıktının olma olasılıklarının eşit olması.

F

faktöriyel : $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere 1 den n ye kadar doğal sayıların çarpımı.

G

grafik : Değişkenler arasındaki ilişkiyi göstermeye yarayan çizgisel anlatım şekli.

güzergah : Yol üstü, uğranacak, geçilecek yer.

H

hız : Bir cismin birim zamanda aldığı yol.

İ

imkânsız olay : Gerçekleşme olasılığı olmayan olay.

istatistik : Gözlem ve araştırmalar sonucu düzenli olarak elde edilen bilgilerin sayılarla veya şekillerle ifade edilmesi.

K

katsayı : Başka bir değeri veya onun değişme oranını göstermek için, bir değerin veya büyüklüğün çarpıldığı sayı.

kesin olay : Olma olasılığı 1 olan olay.

kombinasyon : Bir nesne grubu içerisinden sıra gözetmeksizin yapılan seçimler.

köşegen : Bir çokgende ardışık olmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçası.

M

maksimum : Değişebilen bir niceliğin varabileceği en yüksek olan (sınır).

maliyet : Üretimde bir mal elde edilinceye değin harcanan değerlerin toplamı.

minimum : Değişken bir niceliğin inebileceği en alt olan (sınır).

mutlak değer : Bir reel sayının sayı doğrusunda eşlendiği noktanın başlangıç noktasına uzaklığı.

N

negatif yön : Herhangi bir açının bir kenarından diğer kenarına saat yönünde gidildiğinde oluşan açının yönü.

O

olasılık : Bir şeyin olmasının veya olmamasının matematiksel değeri veya olabilirlik yüzdesi değeri.

olay : Örnek uzayın her alt kümesi.

ordinat : Analitik düzlemde bir noktanın ikinci bileşeni.

ordinat ekseni : Analitik düzlemde dikey eksen, y ekseni.

orijin (başlangıç noktası) : Koordinat eksenlerinin kesiştikleri nokta.

Ö

örnek uzay : Bir olasılık değerinde bütün çıkanların kümesi.

özdeşlik : İki yanı birbirinin aynı olan veya harflerle verilen sayısal değerler ne olursa olsun iki yanı da sayıca eşit değerler alan eşitlik.

P

parametre : Değişken.

paralel doğrular : Aynı düzlemde bulunan, hiçbir noktada birbirini kesmeyen doğrular.

paralelkenar : Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgen.

pascal üçgeni : Matematikte binom katsayılarını içeren üçgensel bir dizi.

permütasyon : Bir küme elemanlarının belli bir sıraya göre dizilişlerinin her biri.

polinom : Çok terimli.

potansiyel enerji : Cisimlerin bir alanda bulundukları fiziksel durumlardan ötürü depoladığı kabul edilen enerji.

prensip : İlke.

S

sanal(imajiner) birim : Karesi – 1 olarak düşünülen *i* sayısı.

sıralı ikili : Kartezyen çarpım kümesinin her bir elemanı.

Y

yamuk : Yalnız iki kenarı paralel olan dörtgen.

SEMBOLLER ve GÖSTERİMLER

$\neq$	eşit değil
$\in$	eleman
$\notin$	elemanı değil
$\subset$	alt küme
$\not\subset$	alt küme değil
$f: A \rightarrow B$	A dan B ye f fonksiyonu
f^{-1}	f fonksiyonunun tersi
G	ağırlık merkezi
$[a, b]$	a, b kapalı aralığı
(a, b)	a, b açık aralığı
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^{+}$	pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^{-}$	negatif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}'$	irrasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	pozitif gerçek sayılar kümesi
$<$	küçük
$\leq$	küçük veya eşit
$>$	büyük
$\geq$	büyük veya eşit
h	yükseklik
$P(A)$	A olayının olasılığı
$C(n, r)$	n nin r li kombinasyon sayısı
//	paralel
$\perp$	dik
n!	n faktöriyel
$P(n, r)$	n nin r li permütasyon sayısı
o	bileşke işlemi
$\lvert AB \rvert$	AB doğru parçasının uzunluğu
$A(x, y)$	A noktasının koordinatları
$A(ABCD)$	ABCD dörtgeninin alanı
Δ	diskriminant
i	sanal sayı birimi
$\mathbb{C}$	karmaşık sayılar kümesi
$\bar{z}$	z karmaşık sayısının eşleniği
$P(x)$	P polinomu
$[AB]$	AB doğru parçası
br	birim
br^2	birimkare
br^3	birimküp

KAYNAKÇA

Ana Britannica Ansiklopedisi; Baki, A. (2008). Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi.

Anton, H. J., *Elementary Linear Algebra*, Wiley&Sons. Canada: 1991.

Billstein, R. ve J. Williamson. *Mathematics*, McDougal Little, 2008.

Brown, R.G., *Advanced Mathematics*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1994.

Foresma, S., *Exploring Mathematics*. USA: 1994.

Jurgensen, R. C., R. G. Brown. *Geometry*. USA: Houghton, 1988.

Larson, R., L. Boswell, T. D. Kanold, L. Stıff. *Geometry*. USA: Mcdougal Litteli, 2007.

Nakatani N., F. Nassiet, J. C. Perrinaud, D. Porte, L. Rivoallan. *Mathematiques*. Paris: Didier, 1994.

Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10,11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. Ankara: MEB, 2018.

Pat, H., *The Changing Role Of The Teachers*. The Journal, Nov.2000 Vol.28.

Sertöz, S., *Matematiğin Aydınlık Dünyası*. Ankara: TÜBİTAK Yayınları, 2011.

Türkçe Sözlük. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları, 2011.

Yazım Kılavuzu. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları, 2012.

GENEL AĞ KAYNAKÇA

www.bsm.gov.tr/kkka/ 06.12.2017

www.ekonomi.gov.tr 01.12.2017

www.http://guncelmatematik.com/pierre-simon-laplace.html) 06.12.2017

www.isam.org.tr/documents/_dosyalar/_pdfler/islam_arastirmalari.../027_054.pdf) 06.12.2017

www.matder.org.tr 05.11.2017

https://www.matematiksel.org/sabit-bin-kurra-ortacagin-buyuk-matematikcisi/ 06.12.2017

www.tuik.gov.tr 09.012.2017

GÖRSEL KAYNAKÇA

Sayfa 11	Yayınevi arşivi
Sayfa 12	Yayınevi arşivi
Sayfa 13	Yayınevi arşivi
Sayfa 19	Yayınevi arşivi
Sayfa 45	Yayınevi arşivi
Sayfa 58	Yayınevi arşivi
Sayfa 59	Yayınevi arşivi
Sayfa 73	Yayınevi arşivi
Sayfa 88	Yayınevi arşivi
Sayfa 94	Yayınevi arşivi
Sayfa 117	Yayınevi arşivi
Sayfa 118	Yayınevi arşivi

Sayfa 146	Yayınevi arşivi
Sayfa 155	Yayınevi arşivi
Sayfa 209	Yayınevi arşivi
Sayfa 210	Yayınevi arşivi
Sayfa 217	Yayınevi arşivi
Sayfa 276	Yayınevi arşivi
Sayfa 277	Yayınevi arşivi
Sayfa 278	Yayınevi arşivi
Sayfa 282	Yayınevi arşivi